BÖLÜM 10

PENCERE İŞLEMİ VE PENCERELER

10.1 GİRİŞ

Her bakımdan kusursuz tam bir pencere yoktur. Bu nedenle kusursuz pencereleme de yapılamaz. Pencereleme sırasında seçilen pencere tam olarak amaca yönelik olmalıdır. Örneğin bandın darlığı önemli ise ona göre bir pencere (örneğin dikdörtgen pencere), yok eğer yan salınımların genliğinin basıklığı önemli ise (zaman ortamında süreksizlik yaratmayan, kenarlarda yavaşça sıfıra geçiş yapan) ona göre bir pencere kullanmalıdır. Bu irdelemeler konu içinde genişçe yapılmaktadır. Kısaca pencere seçimi satranç kuralları gibidir. Öncelikle amaç, daha sonra da bu amaca yönelik kayıp ve kazançlar iyice belirlenmelidir. Örneğin frekans rtamında yan salınımlar istenmiyorsa veya zaman ortamındaki izin uç noktalarında süreksizlikler istenmiyorsa, kenarları yumuşak olarak sıfıra geçiş yapan bir pencere kullanılmalıdır. Ancak bunun da bant genişliğinin fazla olduğu ve gerçek izi bozduğu unutulmamalıdır. Ayrıca pencere seçiminde önemli bir parametre olan asimtotik varyans ta (değişinti) unutulmamalıdır. Asimtotik değişinti pencere genişliği ve pencereyi oluşturan işlevin özelliğine bağlıdır.

Jeofizikte rastlanan sinyaller genellikle "∞" uzunluktadır. "∞" uzunluktaki sinyallerin FD nün alınmasında büyük zorluklar vardır. Ancak sonlu uzunluktaki bir verinin spektrumu bulunabilir (Bkz. Bölüm 5 Örnek 5.1 ve 5.2). Jeofizikte alınan veriler zamanın veya uzayın bir parçasıdır. Söz konusu parça sözcüğü bize pencerenin başlangıcı ve bitişini gösterir. Örneğin bir maden alanındaki gravite profilinin (Şekil 10.1) başlangıcı ve bitimi, gravite değişiminin izlendiği uzayın bir parçasıdır. Profilin başlangıç ve bitiminin dışında da kuşkusuz ki bir gravite alanı vardır. Eğer gözlenen aralık sonsuz büyütülürse bu gravite değişimi de saptanabilir. Ancak jeofiziği ilgilendiren, cevherleşmeye ait alandaki gravite değişimidir. Dolayısı ile profil başlangıç ve bitiminin çok önemi yoktur. İlgilenilen profilin dışındaki gravite değişimi, gerçeğe aykırı olarak, sıfır varsayılır. İşte bu varsayım daha başlangıçta, verinin bir dikdörtgen tipi pencere ile pencerelenmesi anlamına gelmektedir.

Pencereleme, gözlenmesi istenen olayı sınırlayıp, alan dışında ise söz konusu olayı sıfır olarak kabul eden bir işlemdir. Bu olay, basitçe evlerdeki pencereye benzetilebilir (Şekil 10.2). Evin önündeki yol çok uzun olmasına rağmen göz ancak pencerenin genişliğinin izin verdiği ölçülerde yolun a-b arasında kalan kesimini görebilir (kişinin konumu sabit kalmak koşulu ile). Yolun a-b aralığı dışında da sürdüğü bilinir ancak, pencerenin genişliğine bağlı olarak görülemez.

Pencerelemenin spektrum ortamında önemli etkileri vardır:

1. Spektrum ortamındaki ayrımlılık azalması. Bu iki nedenden kaynaklanır.

a. Spektrum ortamındaki bant genişliği pencerenin türüne bağlı olarak, değişebilir. Bant genişliği çok olan pencerelerin yu varlatma etkisi çok, ayırımlılığı ise azdır.

b. Pencere boyuna (dolayısı ile veri boyuna) bağlı olarak temel frekansın (f_0=1/T) sıfır frekansına uzaklığı ve dolayısı ile de"Δf" lerin önemi büyüktür. Kısa pencere boylarında f_0 frekansı sıfırdan uzaklaşacak dolayısı ile Δf ler büyüyecektir. "Δf" ler büyüdükçe ayrımlılık ta azalacaktır (Bkz Bölüm 10.2).

Örnek 10.1
Bir verinin spektrum ortamındaki görünümü Şekil 10.3 te verilmektedir.
a. Yalnızca ilk binin saptanabilmesi için pencere boyu ne olmalıdır?
b. Tüm binlerin saptanması için gerekli pencere boyları ne olmalıdır ?
c. Sinyal uygun bir dikdörtgen pencere ile pencerelendikten sonra söz konusu binler kaçıncı ayrık değerlerde görülür ?

a. $T = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{0.1} = 10\,\text{km}$

b. Son iki bini ayırabilecek pencere boyu

$$f = f_2 - f_1 = 0.32 - 0.30 = 0.02 \;\text{devir/km}$$
$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.02} = 50 \;\text{km olmalıdır.}$$

Görüldüğü gibi veri boyu arttıkça Δf ler küçülmekte dolayısı ile de ayrımlılık artmaktadır.

c. 50 km lik pencerenin ilk bini f=0.02 devir/km de görülür. Dolayısı ile;

f_0 = 0.1 / 0.02 = 5. binde
f_1 = 0.3 / 0.02 = 15. binde
f_2 = 0.32 / 0.02 = 16. binde görülür.

2. Gibbs olayı

Verinin (dolayısı ile pencerenin) iki ucunda oluşan süreksizliklerden kaynaklanır. Bu süreksizlikler, spektrum ortamında dalgalanmalara yol açar. Söz konusu süreksizlikler ne kadar büyük ise, dalgalanmalar da o kadar fazla olur. Dolayısı ile spektrumun sağlığı azalır. Kenarları eğimlendirilmiş pencereler kullanılarak bu sorunun önüne belirli ölçülerde geçilebilir.

3. "∞" uzunluklu bir izin belli bir sınır içinde pencerelenmesi enerji sızma (leakage) olayına yol açacaktır. Böyle sızmalar sonucunda bazı frekanslarda bulunmaması gereken gerçek dışı binler elde edilecektir (Bkz Bölüm 10.3).

4. Pencere boyunun temel dönem veya onun tam katları olarak seçilmesi sorunudur. Aksi halde spektrum yanlış hesaplanır (Bkz Bölüm 10.3).

10.2 PENCERELEME İŞLEMİ

Pencereleme; verinin belli bir kesimi (fiziksel olayın var olduğu kesim) ile, istenen bir pencere işlevinin zaman veya uzay ortamında bire bir çarpılması (Şekil 10.4) demektir. Ancak tüm pencerelerin en önemli özelliği olan başlangıç ve bitim noktaları dışında sıfır, en azından, pencere genişliğinin yarısında ise genliğin 1 olması gerekliliği unutulmamalıdır.

Şekil 10.4 irdelendiğinde dikdörtgen pencere ile pencerelenen sinyalde hiçbir şekil bozukluğu olmadığı, üçgen pencere ile pencerelemenin tümüyle ana sinyalin şeklini bozduğu, buna karşılık üçgen pencerede sinyalin düzgün bir şekilde sıfırlandığı ama dikdörtgen pencerede sinyalin uçlarında sıfırlanma olmadığı, tam uçlarda bir süreksizlik bulunduğu görülmektedir (spektrum ortamına geçerken Gibbs olayı oluşacaktır).

Öyleyse pencereleme işleminde önemli sorunlar vardır: Bu sorunlar aşağıda sıralanmaktadır.

1. Asıl veri şeklini hiç bozmayan pencere türü dikdörtgen penceredir. Ancak bu pencerenin sınırlarındaki süreksizlikler nedeni ile Gibbs olayı oluşur. Gibbs olayının önüne geçmek için, kenarları düzgün bir şekilde sıfırlanan işlevler kullanılır. Fakat bu tür işlevler de sinyalin orijinal şeklini bozarlar (Şekil 10.4).

2. Karşılaşılan diğer bir sorun da pencere boyunun seçimidir. Pencere boyu, frekans ortamında iki önemli parametre ile ilgilidir. Bunlardan biri $w_0=2\pi/T$ ($f_0=1/T$) ile gösterilen temel frekans, diğeri de $w=w_1-w_0$ frekans ortamı örnekleme aralığıdır.

Örnek 10.2

$T_1=5$ ve $T_2=20$ sn dönemli iki adet sinüzoidal dalga verilmektedir. Bu dalgaları uzunluğu kendi dönemleri kadar olan bir dikdörtgen pencere ile pencereleyiniz. Söz konusu izlerin temel frekanslarını ve frekans ortamı örnekleme aralıklarını bulunuz.

1. iz için:

$$w_0 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{5} = 2\pi\frac{1}{5}\ \text{Hz}$$

veya çizgisel olarak

$$f_0 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{5}\ \text{Hz}$$

$$w_n = n.w_0 \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$w_1 = 2\pi\frac{1}{5} \quad , \quad w_2 = 2\pi\frac{2}{5} \quad , \quad w_3 = 2\pi\frac{3}{5} \quad , \quad \Delta w = 2\pi\frac{1}{5}$$

$$f_1 = \frac{1}{5} \quad , \quad f_2 = \frac{2}{5} \quad , \quad f_3 = \frac{3}{5} \quad , \quad \Delta f = \frac{1}{5} \quad ,$$

2. izin

$$w_0 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{20} = 2\pi\frac{1}{20}$$

$$w_1 = 2\pi\frac{1}{20} \quad , \quad w_2 = 2\pi\frac{2}{20} \quad , \quad w_3 = 2\pi\frac{3}{20} \quad ,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_1 = \frac{1}{20} \quad , \quad f_2 = \frac{2}{20} \quad , \quad f_3 = \frac{3}{20} \quad ,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

bulunur. Her iki izin zaman ve frekans ortamı görünümleri Şekil 10.5 te verilmektedir.

Şekil 10.5 incelendiğinde pencere boyu arttırıldıkça ilk w_0 temel frekansının alçak frekanslara doğru kaydığı dolayısı ile frekans ayrımlılığının arttığı ve frekans ortamı örnekleme aralığının küçüldüğü görülmektedir. Zaman ortamındaki izin boyunu 4 kat arttırmakla frekans ortamındaki örnekleme aralığı 4 kat daha küçültülmüştür. Öyleyse pencere boyu "∞" büyütüldüğünde Δw lar çok küçülecek, spektrum da sürekli spektruma yaklaşacaktır.

3. Eğer veri ile herhangi bir işleç zaman veya uzunluk ortamında evriştirilecekse pencere boyu yine önem kazanmaktadır. Örneğin 25 boyunda bir veri ile, 19 boyunda bir işleci evriştirecek olursak sağlıklı 6 adet noktamız kalacaktır. Bu da yorumlama sırasında yanlışlıklara neden olacaktır. Bunun önüne geçmek için ya pencere boyunu büyütmeli ya da veri içindeki örnekleme aralığını küçültmeli, belki de her ikisi birden yapılmalıdır.

10.3 ZAMAN VE FREKANS ORTAMINDA PENCERELEME İŞLEMİ

Herhangi bir f(t) verisinin gelişigüzel bir p(t) penceresi ile zaman ortamında pencerelenmesi her iki işlevin bire bir çarpımıdır. Pencerelenmiş veri $\hat{f}(t)$ ile gösterilirse;

$$\hat{f}(t) = f(t).\,p(t) \tag{10.1}$$

olarak yazılır. Spektrum ortamında bu denklem evrişime döner.

$$\hat{F}(w) = F(w) * P(w) \tag{10.2}$$

Burada F(w) verinin , P(w) da kullanılan herhangi bir pencerenin FD leridir (Bkz Bölüm 5.4 Örnekler).

İdealde, verinin spektrumunun herhangi bir pencere işlevi nedeni ile bozulması istenmez. Başka bir deyişle pencerelenmiş verinin spektrumu ile pencerelenmemiş verinin spektrumlarının aynı olması istenir. Dürtü işlevi kullanılarak [(Bkz (6.12a) özelliği] pencerelenme nedeni ile bozulmayacak spektrum,

$$\hat{F}(w) = F(w) * \delta(w) \tag{10.3}$$

ve

$$P(w) = \delta(w) = 1 \tag{10.4}$$

olması gerekir. Yani herhangi bir pencere işlevinin spektrumunun dürtü işlevinin spektrumuna eşit olması istenir. Ancak hiçbir zaman pencere işlevleri bu koşulu sağlamazlar. Gerçekte

$$P(w) \neq \delta(w) \tag{10.5}$$

dır. Örneğin kullanılan pencerenin dikdörtgen pencere olması durumunda

$$P(w) = T\,\frac{\sin\left(\frac{wT}{2}\right)}{\frac{wT}{2}}$$

(10.6)

spektrum (10.6) denklemi ile verilen "sinc" işlevidir (Bkz Bölüm 5.3.2 Örnek 5.1). Burada "T", pencere boyudur. (10.6) denklemi, söz konusu örnekteki gibi daha kısa olarak yazılabilir.

$$P(w) = T\sin c\left(\frac{wT}{2}\right) \tag{10.7}$$

Dolayısı ile dikdörtgen pencere ile pencerelenmiş $\hat{f}(t)$ işlevinin spektrumu olan $\hat{F}(w)$

$$\hat{F}(w) = F(w) * T\sin c\left(\frac{wT}{2}\right) \tag{10.8a}$$

$$\hat{F}(w) = F(w) * T\,\frac{\sin\left(\frac{wT}{2}\right)}{\frac{wT}{2}} \tag{10.8b}$$

bağıntılarıyla verilir. (10.8) denklemlerinden de anlaşılacağı gibi pencere boyu ne kadar uzun olursa "sinc" işlevi birim dürtü işlevinin spektrumuna yaklaşır. Bu nedenle pencerelenmeden doğan etki en aza indirilmiş olur (Şekil 10.6).

"sinc" işlevine ait bilgiler Bölüm 5.2.2 Örnek 5.1 de verilmektedir. "sinc" işlevin ilk sıfır noktası $2\pi/T$ de yer almakta (Bkz Şekil 5.6) ve T büyüdükçe bant genişliği daralmakta limit durumunda ise birim dürtü işlevine yaklaşmaktadır. Dolayısı ile ana loba ait bant genişliği, pencere uzunluğu ile ters orantılıdır.

Pencereleme zaman ortamında bire bir çarpım, frekans ortamında ise evrişimdir [Şekil 5.6 ve 10.6, Bağıntı (10.2)].

Evrişim işlemi, gerçekte bir kayan ortalama işlemidir. Dolayısı ile pencereleme nedeni ile veri, spektrum ortamında yuvarlatılmış olur. Bu yuvarlatmanın derecesi ana lob bant genişliğine dolayısı ile pencerenin analitik denklemine (spektrum ortamında ana lobun bant genişliğine) ve pencere boyuna bağlıdır. Ancak dikdörtgen pencerenin ana lobu diğer pencerelere oranla en dar olanıdır. Bu nedenle spektrumda, yuvarlatma etkisi en azdır.

Dikdörtgen pencere ile verinin pencerelenmesi sırasında karşılaşılan önemli bir diğer sorun da enerji sızması (leakage) olayıdır. Bu olay "∞" uzunluktaki verinin bir pencere ile kesilmesinden kaynaklanır. Pencerelenmeden önce "∞" enerjiye sahip izin, tüm enerjisinin pencere içinde toplandığı, pencere dışında enerjisinin olmadığı varsayılır. Bu nedenle frekans ortamında yan salınımlar olarak beliren enerji dağılımları görülür. Gerçekte spektrum ortamında bu yan salınımların hiç görülmemesi veya etkisinin en küçük düzeyde olması istenir. Yani tüm enerjinin ana lobta toplanması dolayısı ile yan lobların sıfır genlikli veya en küçük genlikli olması istenir. Ancak dikdörtgen pencerede durum böyle değildir ve yan lobların genliği oldukça fazladır (Bkz. Bölüm 10.4).

Enerji sızma olayı oldukça büyük bir sorundur. Bu sorunun anlaşılması için FD tümlevi dikkate alınmalıdır. FD bağıntısı,

$$F(w) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jwt}\,dt \qquad (10.9)$$

dır. Bu bağıntıda en önemli koşul; tümlevin bir tam dönem boyunca alınması gereğidir. Bu durumda "w_0" temel frekansları ve harmonikleri tüm frekanslarda sıfırdan farklı bir genliğe sahip, çizgi şeklinde görüleceklerdir. (10.9) denkleminde tümlevin başlangıcı önemsizdir. Önemli olan, tümlevin bir tam dönem boyunca alınmasıdır. Başka bir deyişle pencere boyu, temel dönem veya onun tam katları şeklinde seçilmezse spektrum yanlış hesaplanmış olur. Örneğin Şekil 10.5 te verilen sinüzoidallere ait pencere boyları, tam periyot olduğunda binlerde spektrum çizgisel olarak görülmektedir. Çünkü dikdörtgen pencerenin spekturumu olan "sinc" işlevinin sıfırları (n.2π)/T frekanslarında görülmektedir. Dolayısı ile dönemli işlevin temel frekans ve harmoniklerindeki genlikleri sinc işlevinin sıfırlarına rastlar. Bunun doğal bir sonucu olarak ta dönemli bir sinüzoidalin spekturumu; frekans ortamında "sinc" işlevi ile evriştirilirken değişmeyecek ve gerçek spekturum elde edilmiş olacaktır (Bkz Şekil 10.5 ve 10.6).

Şekil 10.7 de değişik frekanslı iki sinüzodial dalganın toplamından oluşmuş dönemli bir verinin spekturumu görülmektedir. Pencere boyu, dönemsel verinin temel periyodunun tam katı boyunda
lınmıştır. Her iki frekanstaki genlikler açıkça ayrılmaktadır. Şekil 10.8 de ise bu kurala dikkat edilmeksizin aynı izin spektrumu alınmıştır. Frekans ayrımlılığının hiç olmadığı görülmektedir.

Buraya dek, pencerenin periyodun tam katı olmaması durumunda yarattığı enerji sızma olayı frekans ortamında incelenmiştir. Aynı olay zaman ortamında da gösterilebilir (Şekil 10.9).

Şekil 10.9 incelendiğinde, özellikle dikdörtgen pencere kullanılırken pencere boyunun verinin tam katı olması gerekliliği kadar, pencere sınırlarında verinin sıfır veya sıfıra asimtot olması gerekliliği de ortaya çıkmaktadır. Tersine durumda verinin kenarlarında süreksizlikler oluşur (Şekil 10.9c). Bu süreksizlikler de spekturum ortamında dalgalanmalar oluşturur (Gibbs olayı). Kuşkuuz ki bu olay çift yönlüdür. Yani frekans ortamındaki bir verinin uç noktalarındaki süreksizlikler, zaman ortamına geçildiğinde yine yan salınımlara yol açacaktır. Bu aşamada, pencerelenen verinin uçları sıfıra yaklaşmıyorsa, Gibbs olayının önüne nasıl geçilebilir sorusu sorulmalıdır. Bu kez dikdörtgen pencerenin dışında, kenarları yumuşak geçişle sıfıra giden, başka bir pencere (örneğin, üçgen pencere, kosinüs pencere vb.) önerilebilinir. Ancak bu pencerelerin de bant genişliklerinin büyük olmalarından dolayı asıl sinyali yuvarlattığı (Şekil 10.4b) unutulmamalıdır. Bu konuya pencere türlerinde değinilecektir.

Pencere boyunun etkisi ve pencere işlevinin özelliği, pencerenin asimtotik değişintisini etkiler. Asimtotik değişinti (Şekil 10.10)

$$AD = \frac{1}{T}\int_{-t_m}^{t_m} [p(t)]^2\,dt \qquad (10.10)$$

bağıntısı ile tanımlanır. Şekil 10.10 dan da görüldüğü gibi t_m (pencere yarı boyu) arttırıldıkça spekturum ortamında bant genişliğinde daralma ve ayrımlılığının arttığı görülmektedir. Kuşkusuz ki bu özellik pencere işlevinin analitik bağıntısına da bağlıdır. Denklemden de anlaşılacağı gibi "t_m" küçültüldükçe değişinti de azalır. Bu da frekans ayrımlılığını daha da azaltır. Bu sonuç; Bölüm 10.2 de verilen Şekil 10.4 teki örneğin de doğal bir sonucudur.

Üçgen pencere için asimtotik değişinti;

$$AD = \frac{2}{3}\frac{t_m}{T}$$

bağıntısı ile tanımlanır.

10.4 PENCERE TÜRLERİ

Herhangi bir işlevin FD nün alınmasına ait örnekler Bölüm 5 te verilmiştir. Dikdörtgen ve üçgen dalganın FD leri kapsamlı bir şekilde anlatılmıştır. Bölüm 5 ten yararlanarak zaman (uzay) bağıntıları verilen pencerelerin FD leri alınarak spektrum ortamı ifadeleri bulunabilir.

Bu bölümde, çeşitli pencerelerin zaman ve frekans ortamı bağıntıları ve genel parametreleri herhangi bir irdelemeye girilmeden verilecektir.

Şekil 10.11 de herhangi bir pencerenin (burada Hamming penceresi verilmiştir) zaman ve frekans ortamı görünümleri ve frekans ortamındaki a_1, a_2, b ve d parametreleri gösterilmektedir.

Bu parametreler spekturum ortamında pencereleri karşılaştırmak için kullanılır. Söz konusu parametrelerden hareketle güvenilir bir spektrum elde edebilmek için pencerenin içermesi gereken özellikler belirlenebilir. Bu özellikler aşağıda verilmektedir.

1. Şekil 10.11 de görüldüğü gibi yan salınımların genliklerine ait olan $c = |a_2 - a_1|$ parametresi küçük olmalıdır.
2. Yan salınımlar hızlı bir şekilde sönmelidir. Yani "d" nin eğimi çok olmalıdır (Şekil 10.11).
3. Pencerenin ana bant genişliği (b) dar olmalıdır.

Ancak yukarıda belirtilen üç koşulu da sağlayan tek bir pencere yoktur. Bu nedenle birçok pencere türleri geliştirilmiştir. Uygulamada amaca bağlı olarak seçilirler. Aşağıda tanıtılan pencere türleri Canıtez ve diğ. (1987) den alınmıştır.

10.4.1 Dikdörtgen pencere (Daniell pencere)

$$p(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le 1/2 \\ 0 & \text{pencere dışında} \end{cases} \qquad (10.11a)$$

$$P(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \qquad (10.11b)$$

$b = 0.81 \quad a_1 = -13\,\mathrm{dB} \quad a_2 = -46\,\mathrm{dB} \quad d = 6\,\mathrm{dB/oct}$

Not: w=2πf olduğu unutulmamalıdır.

10.4.2 Kosinüs pencere

$$p(t)=\begin{bmatrix} \cos(\pi t) & |t|\le 1/2 \\ 0 & \text{pencere} \end{bmatrix} \text{dışında} \tag{10.12a}$$

$$P(f)=\frac{1}{2}\frac{2\cos(\pi f)}{\pi\left(1-4f^2\right)} \tag{10.12b}$$

$b = 1.35 \quad a_1 = -23\,\text{dB} \quad a_2 = -84\,\text{dB} \quad d = 12\,\text{dB/oct}$

10.4.3 Üçgen pencere (Bartlett)

$$p(t)=\begin{bmatrix} 1-2|t| & |t|\le 1/2 \\ 0 & \text{pencere} \end{bmatrix} \text{dışında} \tag{10.13a}$$

$$P(f)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\pi f/2)}{\pi f/2}\right]^2 \tag{10.13b}$$

$b = 1.63 \quad a_1 = -26\,\text{dB} \quad a_2 = -80\,\text{dB} \quad d = 12\,\text{dB/oct} \quad AD = \frac{2}{3}\frac{t_m}{T}$

10.4.4 Hanning penceresi (geliştirilmiş kosinüs pencere)

$$p(t)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\pi t) & |t|\le 1/2 \\ 0 & \text{pencere} \end{bmatrix} \text{dışında} \tag{10.14a}$$

$$P(f)=\frac{\sin(\pi f)}{2\pi f\left(1-f^2\right)} \tag{10.14b}$$

$b = 1.87 \quad a_1 = -32\,\text{dB} \quad a_2 = -118\,\text{dB} \quad d = 18\,\text{dB/oct} \quad AD = \frac{3}{4}\frac{t_m}{T}$

10.4.5 Hamming pencere

$$p(t)=\begin{bmatrix} 0.54+0.46\cos(2\pi t) & |t|\le 1/2 \\ 0 & \text{pencere} \end{bmatrix} \text{dışında} \tag{10.15a}$$

$$P(f)=\frac{\left(1.08-0.16\,f^2\right)\sin(\pi f)}{2\pi f\left(1-f^2\right)} \tag{10.15b}$$

$b = 1.91 \quad a_1 = -43\,\text{dB} \quad a_2 = -63\,\text{dB} \quad d = 6\,\text{dB/oct}$

10.4.6 Papoulis pencere

$$p(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi} \left|\sin(2\pi t)\right| + (1 - 2|t|)\cos(2\pi t) & |t| \le 1/2 \\ 0 & \text{pencere} \end{bmatrix} \text{dışında} \tag{10.16a}$$

$$P(f) = \frac{2 + 2\cos(\pi f)}{\pi^2 (1 - f^2)^2} \tag{10.16b}$$

$b = 2.70 \quad a_1 = -46\,\text{dB} \quad a_2 = -145\,\text{dB} \quad d = 24\,\text{dB}/\text{oct}$

10.4.7 Blackman pencere

$$p(t) = \begin{bmatrix} 0.42 + 0.50\cos(2\pi t) + 0.08\cos(4\pi t) & |t| \le 1/2 \\ 0 & \text{pencere} \end{bmatrix} \text{dışında} \tag{10.17a}$$

$$P(f) = \frac{(.18 f^2 - 1.68)\sin(\pi f)}{\pi f (1 - f^2)(f^2 - 4)} \tag{10.17b}$$

$b = 2.82 \quad a_1 = -58\,\text{dB} \quad a_2 = -126\,\text{dB} \quad d = 18\,\text{dB}/\text{oct}$

10.4.8 Parzen pencere

$$p(t) = \begin{bmatrix} 1 - 24|t|^2 (1 - 2|t|) & |t| < 1/4 \\ 2(1 - 2|t|)^3 & 1/4 \le |t| \le 1/2\, \text{dışında} \\ 0 & \text{pencere} \end{bmatrix} \tag{10.18a}$$

$$P(f) = \frac{3}{8}\left[\frac{\sin(\pi f/4)}{\pi f/4}\right]^4 \tag{10.18b}$$

$b = 3.25 \quad a_1 = -53\,\text{dB} \quad a_2 = -136\,\text{dB} \quad d = 24\,\text{dB}/\text{oct} \quad AD = 0.54\frac{t_m}{T}$

10.4.9 Tukey pencere

$$0 \le \beta < 1/2$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left[\frac{2\pi(t + \beta)}{1 - 2\beta}\right] & -1/2 \le t \le -\beta \\ 1 & -\beta \le t \le \beta \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left[\frac{2\pi(t - \beta)}{1 - 2\beta}\right] & \beta \le t \le 1/2 \\ 0 & \text{pencere} \end{bmatrix} \text{dışında} \tag{10.19a}$$

$$P(f) = \frac{\sin\left[\frac{\pi f(1 + 2\beta)}{2}\right]\cos\left[\frac{\pi f(1 - 2\beta)}{2}\right]}{\pi f\left[1 - (1 - 2\beta)^2 f^2\right]} \tag{10.19b}$$

$d = 18\,\text{dB}/\text{oct}$

a_1, a_2 ve b; β'nın bir işlevidir.

10.4.10 Üç katsayılı pencere

$$p(t)=\begin{cases}\dfrac{1-4\beta}{2}+\dfrac{1}{2}\cos(2\pi t)+2\beta\cos(2\pi t) & |t|\le 1/2 \\ 0 & \text{pencere dışında}\end{cases} \qquad (10.20a)$$

$$P(f)=\frac{\left[(1-16\beta)f^2-(4-16\beta)\right]\sin(\pi f)}{2\pi f\left(1-f^2\right)\left(f^2-4\right)} \qquad (10.20b)$$

$$d=18\,\mathrm{dB/oct}$$

a_1, a_2 ve b; β'nın bir işlevidir.

10.5 İKİ BOYUTLU PENCERELER

Tüm tek boyutlu pencereler, düşey eksen boyunca çevrilerek iki boyutlu pencerelere dönüştürülebilir. Bu durumda pencerelerin denklemlerinde basit geliştirmeler yapılarak iki boyutlu pencerelere ait analitik bağıntılar elde edilir. Örneğin Şekil 10.10 da verilen bir boyutlu üçgen pencere iki boyutlu duruma getirilebilir (Şekil 10.12).

Bilgisayar çalışmalarına uygun olarak tek boyutlu üçgen pencerenin bağıntısı;

$$p(x_i)=\begin{cases}1-(x_i/L) & x_i<L \\ 0 & x_i>L\end{cases} \qquad (10.21)$$

olarak verilir. (10.21) denklemi iki boyutlu olarak yazılırsa konik pencerenin bağıntısı (Pınar 1983)

$$p(K,N)=\begin{cases}1-\dfrac{\left[(K-1)^2+(N-1)^2\right]^{1/2}}{L-1} & R<L \\ 0 & R>L\end{cases} \qquad (10.22)$$

elde edilir. Benzer şekilde 10.13a da verilen geliştirilmiş kosinüs pencere için (Pınar 1983):

$$p(K,N)=\begin{cases}0.5-0.5\cos\left[\dfrac{\pi\left(K^2+N^2\right)^{1/2}}{\left(X^2+Y^2\right)^{1/2}}\right] & K<X \\ 0 & N>Y\end{cases} \qquad (10.23)$$

yazılabilir. Son olarak dikdörtgen pencere ile, kosinüs pencerenin birlikte kullanılmasından elde edilen törpülenmiş kosinüs çanı ve onun iki boyutlu görünümü Şekil 10.13b de verilmektedir.

Törpülenmiş kosinüs çanının zaman (uzay) ortamı ifadesi;

$$
\begin{cases}
1 & R \le X_k \\
0.5+0.5\cos\left\{\dfrac{\pi\left[(K-X_k-1)^2+(N-X_k-1)^2\right]^{1/2}}{\left[(L-X_k-1)^2+(L-X_k-1)^2\right]^{1/2}}\right\} & X_k < R \le L \\
0 & R \ge L
\end{cases}
\qquad (10.24)
$$

olarak verilmektedir (Pınar 1983). Bu denklemlerde:

K : x ekseni sayıcısı.
N : y ekseni sayıcısı.
R : [K2 + N2]1/2.
X : Pencerelerin x ekseni boyu.
Y : Pencerelerin y ekseni boyu.
X_k: Geometrik yerleri 1 olan noktaları içeren çemberin yarıça-
L : Pencerenin yarı boyu.
Δx : L-Xk Törpülenmiş kosinüs çanının yan kanatlarının eğimi.