BÖLÜM 5

FOURİER TÜMLEVLERİ (DÖNEMSİZ İŞLEVLERİN FOURİER AÇILIMLARI)

5.1 FOURİER TÜMLEVLERİ

Fourier tümlevleri, mühendislik problemlerinde yaklaşık 150 yıldan bu yana kullanılmaktadır. 1965 yılında Dr. Ron BRACEWELL "The Fourier Transform and Its Application" isimli kitabında birçok karmaşık matematiksel bağıntıyı daha anlaşılır bir biçimde göstermiştir. Bundan sonra Fourier dönüşümleri (FD) daha yaygın kullanılmaya başlamıştır. Benzer kitaplar, konunun genişletilmesine yol açmıştır. Özellikle Lee (1967) "Statistical Theory of Communication" ve daha sonraları Rabiner ve Gold (1975) "Theory and Application of Digital Signal Processing" gibi yayınlarla sayısal sinyallerdeki uygulama alanları arttırılmıştır. FD leri, özellikle bilgisayarların gelişmesinden sonra uzun sayısal dizilerle kolayca işlem yapabilme nedeniyle sayısal sinyallerin çözümlemesinde, jeofizikte yaygın kullanım alanları bulmuştur.

Zaman veya uzay ortamında alınan bir sinyalde bilinmeyen birçok olaylar gizlidir. Bu nedenlerle iz zaman veya uzay ortamında analiz edilemez. Analiz için spektrum ortamına geçmek gerekir. Herhangi bir sinyalin gerçel, sanal bileşenleri ve dolayısıyla evre kayması ve genlik ile ilgili bilgiler ancak spektrum ortamında belirlenebilir. Örnek olarak bir sinyalin spektrum ortamındaki görünümü Şekil 5.1 de verilmektedir. Yatay eksen frekans olmak üzere, çeşitli binlerdeki gerçel (a_n) ve sanal (b_n) bileşenlerin birbirlerine göre olan durumları görülmektedir. Bilindiği gibi kosinüs bileşeni gerçel, sinüs bileşeni ise sanaldır. FD deki dönmeler, evre kaymasından oluşmaktadır. Başka bir deyişle "w" nın çeşitli değerlerinde yalnız sanal, yalnız gerçel ve bunların bileşke değerleri bulunmaktadır. Sinyali bu ortama geçirmeden, olayların diğer ortamda görülmesi ve sinyalin analiz edilme olanağı yoktur.

Dönemli işlevler FS ne açılırlar. Kısa süreçli olduğundan mühendislik problemlerinde karşılaşılan işlevler genellikle dönemsizdir veya dönemi bilinemez. Örneğin herhangi bir mekanik sisteme etki eden kuvvet çeşitli zaman aralıklarında genliği değişebilen sonsuz dönemli olabilir. Bu tür işlevler için FS leri kullanılamaz. Ancak işlevin dönemi sonsuz büyürken, serinin yaklaşımında bir limit varsa dönemsiz işlev uygun bir şekilde gösterilebilir.

Dönemsiz izlerin spektrum ortamındaki değişimlerini elde etmek için, FS nin genel durumu olan FD leri kullanılır.

Dönemsiz izler genel olarak iki sınıfa ayrılabilir:

1. Sonlu bir t_1, t_2 zaman aralığında sıfırdan farklı ve bu aralığın dışında sıfır olan işlevler.
2. $t=\pm\infty$ için $f(t)\rightarrow 0$ yani sıfıra asimtot olan işlevler.

Belirtilen her iki durumda da verilen bir f(t) izi tanımlanmış olduğu bölgede,

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \left|f(t)\right|^2 dt < \infty$$

koşulunu sağlıyorsa (enerjisi sonlu ise)

$$F(w) =$$

olarak alınabilir.

4. Bölümde dönemli işlevin karmaşık FS ne açılımı verilmişti:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(jnw_0 t) \tag{5.1}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-jnw_0 t)\, dt \tag{5.2}$$

Eğer f(t) işlevi dönemsiz veya dönemi sonsuz büyük ($T \to \infty$) ise

$$w_0 = 2\pi \frac{1}{T} \quad , \quad w_0 = \lim_{T \to \infty} 2\pi \frac{1}{T} = 0$$

bulunur. Yani T sonsuz büyürken "w_0" sıfıra yaklaşmaktadır. Eğer w_0 yeterince küçükse $w_0=\Delta w$ yazılabilir. O zaman nw_0 ayrık değerlerinde görünen binler $n\Delta w$ larda görülür. $\Delta w \to 0$ a yaklaştığında ise ayrık frekans spektrumu sürekli hale gelir. (5.2) bağıntısı (5.1) de yerine konursa:

$$f(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-jnw_0 t)\, dt \right] \exp(jnw_0 t) \tag{5.3}$$

elde edilir. $T \to \infty$ olmasında ise $w_0=2\pi/T=\Delta w$ olarak kullanılır.

$$T = \frac{2\pi}{\Delta w} \quad , \quad \frac{1}{T} = \frac{\Delta w}{2\pi}$$

(5.3) bağıntısı biraz daha düzenlenerek:

$$f(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta w}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-jnw_0 t)\, dt \right] \exp(jnw_0 t) \tag{5.4}$$

elde edilir. Son denklemde;

$$F(w) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-jnw_0 t)\, dt$$

tanımı yapılır ve de kolaylık olması için $w_n=nw_0=w$ olarak gösterilirse,

$$F(w) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-jwt)\, dt \tag{5.5}$$

olarak bulunur. (5.5) denklemi (5.4) de yerine konarak

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}F(w)\exp(-jwt)\Delta w \tag{5.6}$$

sonucuna ulaşılır. T→∞, w→0 a gitmesi durumunda Δw=dw ya ve toplamlar da tümleve dönüşür. Böylece tümlev tanımı kullanılarak aşağıdaki bağıntılara ulaşılır.

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(w)\exp(jwt)dw \tag{5.7}$$

$$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(-jwt)dt \tag{5.8}$$

(5.8) bağıntısı, aslında, dönemli işlevlerin karmaşık açılımlarındaki C_n katsayısıdır.

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(-jnw_0t)dt \tag{5.9}$$

(5.7) ve (5.8) bağıntılarına Fourier tümlev çifti denir. Matematiksel olarak f(t) veya F(w) dan birinin bilinmesi ile diğeri de bulunabilir. Bu bağıntılara "Fourier dönüşüm çiftleri" de denir ve sembolik olarak,

$$F(w)=\Im[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(-jwt)dt \tag{5.10a}$$

$$f(t)=\Im^{-1}[F(w)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)\exp(jwt)dw \tag{5.10b}$$

şeklinde gösterilir.

5.2 SİNYALLERİN ENERJİLERİ AÇISINDAN SINIFLANDIRILMASI

Bir direnç (R) üzerinden geçen akım [i(t)] ve yarattığı gerilim [V(t)] ile ilgili fiziksel kavramlar kullanılarak sinyallerin enerjileri açısından sınıflandırılmasına yönelik açıklık getirilebilir. Böyle bir sistemin gücü;

$$P=\frac{V^2(t)}{R} \quad \text{(watt) veya} \quad P=i^2(t).R \quad \text{(watt)}$$

denklemleri ile bilinir. R=1 ohm olması durumunda V(t)=i(t) olur. Bu eşitliği bir f(t) işlevi ile gösterirsek

$P=[f(t)]^2$ (watt)

elde edilir. Söz konusu f(t) sinyalinin (t_1, t_2) zaman aralığında harcadığı enerji ise:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 \, dt \qquad \text{(Joule)} \qquad (5.11a)$$

dir. Burada, zaman aralığı ∞ büyütüldüğünde;

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt \qquad \text{(Joule)} \qquad (5.11b)$$

dir. (5.11b) bağıntısının sonlu bir değere sahip olması durumunda

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty \qquad \text{(Joule)} \qquad (5.11c)$$

ise kullanılan f(t) sinyaline enerji sinyali denir. (5.11c) bağıntısı gerçel bir sinyalin enerjisini gösterir. Eğer sinyal gerçel değil de karmaşık ise, bu kez enerjisi

$$E = \int_{t_1}^{t_2} f(t).f(t)^* \, dt < \infty \qquad (5.11d)$$

bağıntısıyla verilir. Burada f*(t) karmaşık eşleniği gösterir. Şe-

---

Not: Eğer bir enerji sinyali t<0 için sıfır değerini alıyorsa, bu sinyale dalgacık denir.

Şekil 5.2 de bazı enerji sinyalleri görülmektedir. Başka bir deyişle kullanılan f(t) sinyalinin taşıdığı enerji sonlu olmalıdır. Benzer düşünceye (5.10) denkleminden hareketle de varılabilir. Bu denklemde exp(-jwt) nin alabileceği en büyük değer 1 dir. Dolayısı ile Fourier tümlevinin varlığı için gerekli ve yeterli koşul (5.11) eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Sözü geçen f(t) izinin 1 ohm luk dirençte harcadığı ortalama güç ise;

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt < \infty \qquad (5.12)$$

denkleminden bulunur. Sonsuz zaman aralığında ortalama güce sahip olan sinyallere "güç sinyalleri" denir.

Böyle enerjileri sonsuz olan sinyallerin mutlak tümlevleri alınamaz. Dolayısı ile FD nün varlığı için yeterli koşul sağlanamaz. Bu işlevlerin FD limitte bulunabilir (ortalama güce sahip sinyaller=güç sinyalleri). Bu sinyallere tekil sinyaller de denir. Tekil sinyallere örnek olarak A, sgn(t), U(t), $\cos w_0 t$, $\sin w_0 t$ gibi tüm dönemli işlevler verilebilir (Bkz Örnek 5.7, 5.8 ve 5.9).

Bu tip sinyallerin yani enerjileri sonsuz, ancak ortalama güçleri sonlu olan sinyallerin (tekil, güç sinyalleri) FD nü almaktansa, bunların FS açılımlarının kullanıldığı, Bölüm 4 ten bilinmektedir. (5.11c) ve (5.12) denklemleri karşılaştırıldığında farklı olarak tümlev sınırlarının (-T/2,T/2) olduğu ayrıca tümlevin başında 1/T çarpanının bulunduğu görülür. (5.12) bağıntısından şu önemli sonuç çıkarılır: Bir işlevin FD alınması için gerekli ve yeterli koşul toplam enerjinin değil, enerji yoğunluğunun (ortalama gücünün) sonlu olmasıdır.

Dönemli işlevlerin mutlak tümlevleri alınamadığından yani enerjileri sonlu olmadığından klasik FD alınamaz. Ancak limit durumlarından yararlanarak FD leri bulunabilir (Bkz Örnek 5.7).

Dönemli bir işlevin FD nü alırken aşağıdaki sıra izlenir:
1. (-T/2,T/2) sonlu zaman aralığında Fourier tümlevi bulunur.
2. $T\to\infty$ a giderken limit bulunur.

Ancak dönemli bir işlevin FS açılımı kullanılarak frekans ortamındaki davranışı daha kolay bulunabilir. Bir f(t) işlevinin FS, (4.7) bağıntısıyla verilir.

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(jnw_0 t) \quad , \quad w_0=\frac{2\pi}{T}$$

Bu bağıntının her iki yanının FD alınırsa

$$\Im[f(t)]=\Im\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(jnw_0 t)\right]=F(w)$$

$$F(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \Im[\exp(jnw_0 t)]$$

$$\Im[\exp(jnw_0 t)]=2\pi\,\delta(w-nw_0) \qquad (5.13a)$$

$$F(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(w-nw_0) \qquad (5.13b)$$

elde edilir. (5.13b) bağıntısından görüldüğü gibi dönemli bir f(t) işlevinin FD, eşit aralıklarla $w=nw_0$ binlerinde görülen ve genlikleri $2\pi C_n$ olan dürtülerden oluşmaktadır.

Not: $C_n=\left(a_n^2+b_n^2\right)$ dır (Bkz Bölüm 4).

5.3 FOURİER DÖNÜŞÜMLERİNE AİT BAZI BAĞINTILAR

Genelde FD de gerçel ve sanal kısımlar vardır.

1. (5.8) eşitliğinde exp(-jwt)=cos(wt)-jsin(wt) konursa:

$$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(wt)dt \qquad (5.14)$$

elde edilir. Bu bağıntıda FD nün gerçel kısmı

$$\text{Ger}|F(w)| = G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)\,dt \qquad (5.15)$$

ve sanal kısmı da,

$$\text{San}|F(w)| = jS(w) = -j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(wt)\,dt \qquad (5.16)$$

olarak tanımlanır.

2. Gerçel ve sanal kısımlar kullanılarak (5.14) denklemi

$$F(w) = G(w) + j\,S(w) \qquad (5.17)$$

biçimine dönüşür. Kutupsal koordinatlardan,

$$F(w) = |F(w)|\exp[j\phi(w)] \qquad (5.18a)$$

yazılabilir. Burada; $|F(w)|, f(t)$ işlevinin genlik spektrumu ve $\phi(w)$, f(t) işlevinin evre spektrumudur. Bölüm 4.1 deki tanımlardan yararlanarak

$$\phi(w) = \arg F(w) = \tan^{-1}\left[\frac{S(w)}{G(w)}\right] = -\tan^{-1}\left[\frac{S(w)}{G(w)}\right] \qquad (5.18b)$$

yazılabilir. $\phi(w)$ ya aynı zamanda F(w) nın argümanı denir (Bölüm 4.1). Bu nedenlerle $\phi(w)=\arg F(w)$ şeklinde gösterilebilir. Dolayısı ile (5.18a) denklemi

$$F(w) = |F(w)|\exp[j\arg F(w)] \qquad (5.18c)$$

biçiminde de yazılabilir. Genlik spektrumu ise;

$$|F(w)| = \left[G(w)^2 + S(w)^2\right]^{1/2} \qquad (5.18d)$$

denklemi ile verilir. (5.15) ve (5.16) dan elde edilen işlev, sırası ile w'ya göre çift ve tek işlevdir. Yani:

$$G(w) = G(-w) \qquad \text{Çift işlev} \qquad (5.19)$$
$$S(w) = -S(-w) \qquad \text{Tek işlev} \qquad (5.20)$$

3. f(t) gerçel işlev ise, $|F(w)|$ spektrum genliği "w" nın çift işevi, evresi de "w" nın tek işlevidir. (5.18a) da w=-w konarak

$$F(-w) = |F(-w)|\exp[j\phi(-w)] \qquad (5.21a)$$

elde edilir. Bu denklemde

$$F^*(w) = F(-w) \tag{5.21b}$$

dır. (5.21b) denklemi F(w) işlevinin karmaşık eşleniği olarak bilinir. (5.18a) dan da

$$F^*(w) = |F(w)|\exp[-j\phi(w)]$$

olarak yazılabilir. Öyleyse;

$$|F(-w)|\exp[j\phi(-w)] = F(w)\exp[-j\phi(w)]$$

dir. Buradan da,

$$\begin{aligned} |F(-w)| &\equiv |F(w)| \\ |\phi(-w)| &\equiv |-\phi(w)| \end{aligned} \tag{5.21c}$$

olduğu kanıtlanır. Buraya dek yapılan kanıtlamalardan yararlanarak

$$|F(w)| = F(-w) = F^*(w) = |F(w)|\exp[-j\phi(w)] \tag{5.21d}$$

yazılabilir.

4. "t" ortamında karmaşık bir izin FD gerçel (çift) ve sanal (tek) bileşenlerin toplamı

$$f(t) = g(t) + js(t)$$

olarak gösterilebilir. O zaman,

$$F(w) = \Im[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-jwt)dt = \int_{-\infty}^{\infty} [g(t) + js(t)][\cos(wt) - j\sin(wt)]\, dt$$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} [g(t)\cos(wt) + s(t)\sin(wt)]dt - j\int_{-\infty}^{\infty} [g(t)\sin(wt) - s(t)\cos(wt)]dt \tag{5.22}$$

elde edilir. FD ün gerçel ve sanal kısımları ise:

$$G(w) = \Im[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [g(t)\cos(wt) + s(t)\sin(wt)]dt \tag{5.23a}$$

$$S(w) = \Im[s(t)] = -\int_{-\infty}^{\infty} [g(t)\sin(wt) - s(t)\cos(wt)]dt \tag{5.23b}$$

şeklinde yazılabilir. Aynı yoldan gidilerek ters dönüşüm bağıntısının gerçel ve sanal kısımları da elde edilir.

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[G(w)\cos(wt)-S(t)\sin(wt)]dw \quad (5.24a)$$

[f(t) sinyalinin zaman ortamındaki çift bileşeni]

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[G(w)\sin(wt)+S(w)\cos(wt)]dw \quad (5.24b)$$

[f(t) sinyalinin zaman ortamındaki tek bileşeni]

Bu yol ile, zaman ortamında bir f(t) izini tek ve çift bileşenlerine ayırabiliriz (Bkz Bölüm 7.3.2 ve 7.3.5).

a. f(t) işlevi gerçel ise; s(t)=0 demektir. O zaman F(w) nin gerçel ve sanal kısımları:

$$G(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(wt)dt \quad (5.25)$$

$$S(w)=-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(wt)dt \quad (5.26)$$

denklemleri tek ve çift işlev özellikleri kullanılarak;

$$G(-w)=G(w)$$
$$S(-w)=-S(w)$$
$$F(-w)=G(w)-jS(w)$$

olacağından (5.21b) denklemine ulaşılır.

b. f(t) sanal ise; $g(t)=0, f(t)=js(t)$ olur. O zaman F(w) nın gerçel ve sanal kısımları:

$$G(w)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)\sin(wt)dt$$

$$S(w)=-\int_{-\infty}^{\infty}s(t)\cos(wt)dt \quad (5.27)$$

sinüs ve kosinüs işlevlerinin özelliklerinden:

$$G(-w)=-G(w)$$
$$S(w)=S(w)$$
$$F(-w)=-G(w)+jS(w)$$

olacağından, sonuçta

$$F(-w)=-F^*(w) \quad (5.28)$$

elde edilir. Eğer bir işlevin FD de (5.28) özelliği varsa işlev sanaldır.

c. f(t) çift işlev ise; f(-t)=f(t) olacağından f(t) cos(wt) çarpımı "t" ye göre çift, f(t) sin(wt) de tektir.

$$S(w) = 0 \quad , \quad F(w) = G(w) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(wt)dt \qquad (5.29)$$

(5.29) bağıntısına Fourier kosinüs dönüşümü (FCD) denir. Bu durumda ters dönüşüm bağıntısı,

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} G(w)\cos(wt)dw = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(w)\cos(wt)dw \qquad (5.30)$$

olarak verilir. (5.30) denklemi; gerçel bir işlevin, FD de gerçel ise işlevin çift olması gerektiğini belirtir.

d. f(t) tek işlev ise; f(-t)=-f(t) olacağından (c) ye benzer yolla

$$G(w) = 0 \quad , \quad F(w) = -jS(w) = -2j\int_0^{\infty} f(t)\sin(wt)dt \qquad (5.31)$$

yazılır. (5.31) bağıntısı Fourier sinüs dönüşümüdür (FSD). Ters dönüşüm bağıntısı ise:

$$f(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} SG(w)\sin(wt)dw = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(w)\sin(wt)dw \qquad (5.32)$$

e. f(t) işlevi tek ve çift işlevlerin toplamı şeklinde ise;

$$f(t) = f_ç(t) + f_t(t)$$

tek ve çift işlevlerin özelliklerinden

$$f(t) = f_ç(t) + f_t(t)$$
$$f_t(-t) = -f_t(t) \quad , \quad f_ç(-t) = f_ç(t)$$
$$F(w) = \Im[f(t)] = G(w) + jS(w) \qquad (5.33a)$$
$$F_ç(w) = \Im[f_ç(t)]$$
$$F_t(w) = \Im[f(t)] \qquad (5.33b)$$

ile gösterilir.

$$G(w) + jS(w) = F_ç(w) + F_t(w)$$

olacağından

$$F_ç(w) = G(w)$$
$$F_t(w) = jS(w) \tag{5.34}$$

elde edilir. Eğer işlev tek ve çift bileşenlerinin bir toplamı şeklinde yazılıyorsa aşağıdaki denklemler geçerlidir (Bkz Örnek 5.5).

$$f(t) = f_ç(t) + f_t(t) \text{ ise}$$
$$f_ç(t) \to \Im \to G(w) \quad , \quad f_t(t) \to \Im \to jS(w) \tag{5.35}$$

$$G(w) = 2\int_0^\infty f_ç(t)\cos(wt)dt$$
$$S(w) = -2\int_0^\infty f_t(t)\sin(wt)dt \tag{5.36}$$

$$f_ç(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty G(w)\cos(wt)dw$$
$$f_t(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S(w)\sin(wt)dw \tag{5.37}$$

5.3.1 Gerçel-sanal (tek-çift) işlevlerve Fourier dönüşümleri

"t" ortamındaki işlevin yalnız gerçel (çift), yalnız sanal (tek) veya bunların karmaşasından oluşması durumunda FD leri ile ilgili sonuçlar aşağıdaki gibi verilebilir (Şekil 5.3).

f(t)	F(w)	Şekil No
Gerçel ve çift	Gerçel ve çift	5.3a
Gerçel ve tek	Sanal ve tek	5.3b
Sanal ve çift	Sanal ve çift	5.3c
Sanal ve tek	Gerçel ve tek	5.3d
Karmaşık ve çift	Karmaşık ve çift	5.3e
Karmaşık ve tek	Karmaşık ve tek	5.3f
Gerçel ve bakışıksız	Karmaşık ve hermitian	5.3g
Sanal ve bakışıksız	Karmaşık ve antihermitian	5.3h

Tüm bu özellikler aşağıdaki gibi özetlenebilir.

$$f(t) = f_ç(t) + f_t(t) = Ger[f_t(t)] + jSan[f_t(t)] + Ger[f_ç(t)] + jSan[f_ç(t)]$$
$$F(w) = F_t(w) + F_ç(w) = Ger[F_t(w)] + jSan[F_t(w)] + Ger[F_ç(w)] + jSan[F_ç(w)]$$

Hermitian işlevi ise hem gerçel ve hem de sanal kısımlarının bakışık olarak tanımlandığı karmaşık bir işlevdir (Şekil 5.4) ve

$$f(t) = f^*(-t)$$

özelliği ile tanımlanır.

5.3.2 Bir işlevin karmaşık eşleniğinin Fourier dönüşümü

Herhangi bir f(t) işlevinin karmaşık eşleniği f*(t) ile gösterilir. Bunların FD leri arasında aşağıdaki ilişki vardır.

f(t)	[f*(t)]
Gerçel	F(w)
Sanal	-F(w) = F*(-w)
Çift	F*(w) = F*(-w)
Tek	-F*(w)

Örnek 5.1
Aşağıda bağıntısı verilen dikdörtgen dalganın (Şekil 5.5) FD nü bulunuz.

$$P_d(t) = \begin{bmatrix} 1 & |t| < \dfrac{d}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{d}{2} \end{bmatrix}$$

$$F(w) = \Im[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} P_d(t)[\exp(-jwt)]dt = \int_{-d/2}^{d/2} 1\exp(-jwt)dt = \frac{1}{-jw}\exp(-jwt)\Big|_{-d/2}^{d/2}$$

$$= \frac{1}{jw}[\exp(jwd/2) - \exp(-jwd/2)]$$

$$2j\sin\left(\frac{wd}{2}\right) = \exp(jwd/2) - \exp(-jwd/2) \quad \text{dir.}$$

$$F(w) = \frac{1}{jw}2j\sin\left(\frac{wd}{2}\right) = \frac{2}{w}\sin\left(\frac{wd}{2}\right) = \frac{2}{w}\sin\left(\frac{wd}{2}\right)\frac{wd/2}{wd/2}$$

$$= \frac{2}{w}\frac{wd}{2}\frac{(\sin wd/2)}{wd/2} = d\frac{(\sin wd/2)}{wd/2}$$

$$= \lim_{d\to T} T\frac{(\sin wT/2)}{wT/2} = \frac{2}{w}\sin\left(\frac{wT}{2}\right) = T\sin c\left(\frac{wT}{2}\right)$$

F(w) nın değişimi Şekil 5.6 da verilmektedir. Kesiksiz çizgiler $|F(w)|$ genliğini, noktalı çizgiler de F(w) yı göstermektedir.

Örnek 5.2
Aşağıda verilen f(t) işlevinin (Şekil 5.7) FD nü bulunuz.

$$f(t)=\begin{cases}\exp(-\alpha t) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-jwt)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\exp[(-\alpha t+jw)t]dt=\frac{1}{-(\alpha+jw)}\exp[(-\alpha+jw)t]_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{-(\alpha+jw)}[\exp(-\alpha)-\exp(0)]=\frac{1}{\alpha+jw}$$

$$F(w)=\frac{\alpha}{\alpha^2+w^2}-j\frac{w}{\alpha^2+w^2}$$

Denklemin ilk kısmı çan eğrisidir. Genlik spektrumu ise

$$|F(w)|=\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+w^2}\right)^2+\left(\frac{w}{\alpha^2+w^2}\right)^2\right]^{1/2}=\left(\alpha^2+w^2\right)^{-1/2}$$

w=0 için ise

$$|F(w)|=\frac{1}{\alpha}$$

dır. Öngörülen dalganın genlik spektrumu ise Şekil 5.8 de verilmektedir.

Örnek 5.3
exp(-αt) işlevinin FCD ve FSD nü bulunuz [α>0, t>0]

$$\Im_c[\exp(-\alpha t)]=\int_0^{\infty}\exp(-\alpha t)\cos(wt)dt=I_1$$

$$\Im_s[\exp(-\alpha t)]=\int_0^{\infty}\exp(-\alpha t)\sin(wt)dt=I_2$$

$$I_1=\int_0^{\infty}\exp(-\alpha t)\cos(wt)dt=\left.\frac{-\exp(-\alpha t)\cos(wt)}{\alpha}\right|_0^{\infty}-\frac{w}{\alpha}\int_0^{\infty}\exp(-\alpha t)\sin(wt)dt$$

$$I_1=\frac{1}{\alpha}[-\exp(-\alpha t)\cos(wt)]_0^{\infty}-\frac{w}{\alpha}I_2$$

$$I_1=\frac{1}{\alpha}-\frac{w}{\alpha}I_2$$

Benzer şekilde I_2 tümlevi alınırsa,

$$I_2=\int_0^{\infty}\exp(-\alpha t)\sin(wt)dt=\left.\frac{-\exp(-\alpha t)\sin(wt)}{\alpha}\right|_0^{\infty}-\frac{w}{\alpha}\int_0^{\infty}\exp(-\alpha t)\cos(wt)dt$$

bulunur. Tümlev çözümünde ilk kısım sıfırdır.

$$I_2 = \frac{w}{\alpha} I_1$$

I_1 ve I_2 denklemleri çözülürse,

$$I_1 = \frac{\alpha}{\alpha^2 + w^2} \quad , \quad I_2 = \frac{w}{\alpha^2 + w^2}$$

elde edilir. Yani;

$$\Im_c[\exp(-\alpha t)] = \frac{\alpha}{\alpha^2 + w^2}$$

$$\Im_s[\exp(-\alpha t)] = \frac{w}{\alpha^2 + w^2}$$

dır. Genlik spektrumu ise Örnek 5.2 ye benzer şekilde bulunur (Şekil 5.8).

Örnek 5.4
f(t) = u(t).[sin(at)/t] işlevinin FD nü, işlevi tek ve çift kısımlarına ayırarak bulunuz. Genlik ve evre spektrumunu hesaplayınız.

Birim basamak işlevi

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

olarak verilir (Şekil 5.9). Tek ve çift işlevlerin özelliklerinden [Bağıntı (3.4)],

$$f_ç(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$$

$$f_t(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$$

$$f_ç(t) = \frac{1}{2}\left[u(t)\frac{\sin(at)}{t} + u(-t)\frac{\sin(-at)}{-t}\right]$$

$$f_ç(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin(at)}{t}[u(t) + u(-t)]$$

$$f_t(t) = \frac{1}{2}\left[u(t)\frac{\sin(at)}{t} - u(-t)\frac{\sin(-at)}{-t}\right]$$

$$f_t(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin(at)}{t}[u(t) - u(-t)]$$

f(t), $f_ç(t)$ ve $f_t(t)$ işlevlerinin görünümleri Şekil 5.10, 5.11 ve 5.12 de verilmektedir.

Not: Tek ve çift işlevlere ait özelliklerden (Bölüm 5.3e) ve (5.33) denklemlerinden yararlanılır. Eğer f(t) t nin çift işlevi ise (5.15) den

$$\text{Ger}|F(w)| = G(w) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(wt)dt$$

$$|F(w)| = |G(w)|$$

Eğer f(t), t nin tek işlevi ise (5.16) dan

$$\text{San}|F(w)| = jS(w) = -j2\int_0^\infty f(t)\sin(wt)$$

$$|F(w)| = |S(w)|$$

dir.

(5.23) denklemlerinden,

$$G(w) = F_ç(w) = \Im[f_ç(t)]$$
$$S(w) = F_t(w) = \Im[f_t(t)]$$
$$G(w) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{w}{a/\pi}\right)$$

bulunur.

$$S(w) = -2\int_0^\infty f_t(t)\sin(wt)dt = -2\int_0^\infty \frac{\sin(at)}{t}\sin(wt)dt = -2\int_0^\infty \frac{1}{t}\sin(at)\sin(wt)dt$$

Not: $\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$$S(w) = -\int_0^\infty \frac{\cos[(w-a)t] - \cos[(w-a)]}{t}dt$$

$$S(w) = \ln\left|\frac{w-a}{w+a}\right| = \ln\left|\frac{2\pi f - a}{2\pi f + a}\right|$$

elde edilir. Elde edilen G(w) ve S(w) yardımı ile $|F(w)|$ ve arg[F(w)]=ϕ(w) hesaplanır. Genlik ve evre spektrumları Şekil 5.13 ve 5.14 te verilmektedir.

Örnek 5.5

$f(t) = \exp(-\alpha t).\sin(\beta t).u(t)$ sinyalinin (Şekil 5.15) FD nü bulunuz.

Not: u(t) birim basamak işlevidir.

$$\Im\left[\exp(-\alpha t)u(t)\right] = \frac{1}{\alpha + jw} \qquad \text{(çizelge 6.1 den)}$$

Euler denkleminden:

$$\sin(\beta t) = \frac{1}{2j}\left[\exp(j\beta t) - \exp(-j\beta t)\right]$$

bulunur. Frekans öteleme kuramından (Bkz Bölüm 5.4 Özellik 5)

$$\Im\left[\frac{1}{2j}\exp(-\alpha t)u(t)\exp(-j\beta t)\right] = \frac{1}{2j}\frac{1}{\alpha + j2\pi(f - \beta/2\pi)}$$

$$\Im\left[-\frac{1}{2j}\exp(-\alpha t)u(t)\exp(-j\beta t)\right] = -\frac{1}{2j}\frac{1}{\alpha + j2\pi(f + \beta/2\pi)}$$

yararlanarak

$$F(f) = \Im\left[\exp(-\alpha t)\sin(\beta t)u(t)\right] = \frac{\beta}{(\alpha + j2\pi f)^2 + \beta^2}$$

Genlik spektrumu ise;

$$|F(f)| = \left[F^2(f)\right]^{1/2}$$

$$|F(f)| = \left\{\left[\frac{\alpha}{(\alpha + j2\pi f)^2 + \beta^2}\right]^2\right\}^{1/2}$$

$$|F(f)| = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - 4\pi^2 f^2 + 4j\alpha\pi f}$$

dır. Gerçel ve sanal kısımlar ayrılırsa

$$|F(f)| = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - 4\pi^2 f^2} + \frac{1}{j}\frac{\beta}{4\alpha\pi f}$$

ve evre spektrumu da,

$$\phi(f) = \tan^{-1}\left\{\frac{\text{Gerçel}[F(f)]}{\text{Sanal}[F(f)]}\right\}$$

$$\phi(f) = \tan^{-1}\left(\frac{4\alpha\pi f}{\alpha^2 + \beta^2 - 4\pi^2 f^2}\right)$$

elde edilir. $2\pi f = w$ dönüşümü kullanılarak çizgisel frekanstan açısal frekansa geçilebilir.

$$F(w) = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - w^2} - \frac{\beta}{2\alpha w}$$
$$\phi(f) = \tan^{-1}\left(\frac{2\alpha w}{\alpha^2 + \beta^2 - w^2}\right)$$

Bunlara ilişkin genlik ve evre spektrumları Şekil 5.16 da verilmektedir.

Şekil 5.15 te kesikli çizgi ile gösterilen sinyalin zarfıdır. Zarfın saptanmasına, Hilbert dönüşümleri konusunda değinilecektir.

Örnek 5.6
x(t)=sgn(t) signum işlevinin (Şekil 5.17) FD nü bulunuz.

sgn(t) işlevinin kolları ∞'a gittiğinde Dirichlet koşullarını sağlamaz (enerjisi ∞ dur). Bundan dolayı limit kullanılarak FD alınır

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \tag{5.38}$$

Basamak işlevi kullanılarak sgn(t), aşağıdaki gibi yazılır.

$$\operatorname{sgn}(t) = u(t) - u(-t) \tag{5.39}$$

Limit kullanarak (5.39) denklemi

$$\operatorname{sgn}(t) = \lim_{\alpha\to 0}\left[\exp(-\alpha t)u(t) - \exp(\alpha t)u(-t)\right]$$

dır. Bunun FD ise;

$$\Im[\operatorname{sgn}(t)] = \Im\left\{\lim_{\alpha\to 0}\left[\exp(-\alpha t)u(t) - \exp(\alpha t)u(-t)\right]\right\}$$
$$= \lim_{\alpha\to 0}\left\{\Im[\exp(-\alpha t)u(t)] - \Im[\exp(\alpha t)u(-t)]\right\}$$
$$\Im[\operatorname{sgn}(t)] = \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{1}{\alpha + jw} - \frac{1}{\alpha - jw}\right] \qquad \text{(Çizelge 6.1 den)}$$
$$\Im[\operatorname{sgn}(t)] = \frac{1}{jw} + \frac{1}{jw} = \frac{2}{jw}$$

olarak bulunur.

Örnek 5.7
f(t)=cos(w_0t) işlevinin FD nü bulunuz.

$$\cos(w_0 t) = \frac{1}{2}\left[\exp(jw_0 t) + \exp(-jw_0 t)\right]$$
$$\Im[\cos(w_0 t)] = \frac{1}{2}\Im[\exp(jw_0 t)] + \frac{1}{2}\Im[\exp(-jw_0 t)]$$

(6.15) denkleminden,

$$\Im[\cos(w_0 t)] = \pi\,\delta(w + w_0) + \pi\,\delta(w + w_0)$$
$$\Im[\cos(w_0 t)] = \pi\,[\delta(w + w_0) + \pi\,\delta(w + w_0)]$$

bulunur.

5.4 FOURİER DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ

1. Doğrusallık özelliği

a_1 ve a_2 sabit olmak üzere ve

$$\Im[f_1(t)] = F_1(w) \quad , \quad \Im[f_2(t)] = F_2(w)$$

ise

$$\Im[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(w) + a_2 F_2(w)$$

dır.

Kanıtlama:

$$\Im[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] e^{-jwt}\, dt$$
$$= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-jwt}\, dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-jwt}\, dt$$

birinci tümlev $F_1(w)$, ikincisi ise $F_2(w)$ dır.

$$\Im[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(w) + a_2 F_2(w) \tag{5.40}$$

2. Zaman ölçekleme özelliği

$$\Im[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right) \tag{5.41a}$$
$$\Im^{-1}[F(aw)] = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{t}{a}\right) \tag{5.41b}$$

dır.

Kanıtlama:

$a>0$ için $at=x$ ve $dt=dx$ dönüşümü yapılsın,

$$\Im[f(at)] = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-[-j(w/a)x]}dx$$

x yerine t konursa

$$\Im[f(at)] = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-[-j(w/a)t]}dt$$

$$\Im[f(at)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{w}{a}\right)$$

bulunur. a<0 değerleri için de benzer yol izlenirse,

$$\frac{1}{|a|}F\left(\frac{w}{a}\right)$$

elde edilir. Sonuçta

$$\Im[f(at)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{w}{a}\right)$$

bulunur.

3. $\Im[f(t)] = F(w)$ ise,
$\Im[f(-t)] = F(-w)$

dır.

Kanıtlama:

(5.41a) bağıntısında $a = -1$ konarak

$$\Im[f(at)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{w}{a}\right) = \frac{1}{|-1|}F\left(\frac{w}{-1}\right) = F(-w)$$

$$\Im[f(-t)] = F(-w) \qquad (5.42)$$

elde edilir.

4. Zaman kayma (öteleme) özelliği

$\Im[f(t)] = F(w)$ ise
$\Im[f(t-t_0)] = e^{-jwt_0}F(w)$

dir.

Kanıtlama:

$$\Im[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-jwt_0}dt$$

bağıntısında $t - t_0 = x$, $t = x + t_0$ ve $dt = dx$ dönüşümleri yapılırsa:

$$\Im[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-jw(t_0+x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-jwt_0}e^{-jwx}dx = e^{-jwt_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-jwx}dx$$

son bağıntıdaki tümlev F(w) ya eşittir. Buradan da

$$\Im[f(t-t_0)] = e^{-jwt_0}F(w) \qquad (5.43)$$

sonucuna ulaşılır.

5. Frekans kayma(öteleme) özelliği

F(w) = [f(t)] ise
$$\Im\left[f(t)e^{-jw_0t}\right] = F(w-w_0)$$

dır.

Kanıtlama:

$$\Im\left[f(t)e^{jw_0t}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)e^{jw_0t}\right]e^{-jwt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{[-jt(w-w_0)]}dt$$

tümlev F(w-w0) a eşittir.

$$\Im\left[f(t)e^{jw_0t}\right] = F(w-w_0) \qquad (5.44a)$$

Benzer yoldan gidilerek te

$$\Im\left[f(t)e^{-jw_0t}\right] = F(w+w_0) \qquad (5.44b)$$

yazılabilir.

Örnek 5.8
$F(w) = \Im[f(t)]$ ise $[f(t)\cos(w_0t)]$ nin FD nü bulunuz.

$$\cos(w_0t) = \frac{1}{2}\left(e^{jw_0t} + e^{-jw_0t}\right)$$

dır.

$$\Im\left[f(t)\cos(w_0t)\right]=\left[\frac{1}{2}f(t)e^{jw_0t}+\frac{1}{2}f(t)e^{-jw_0t}\right]=\frac{1}{2}\Im\left[f(t)e^{jw_0t}\right]+\frac{1}{2}\Im\left[f(t)e^{-jw_0t}\right]$$

(5.44a) ve (5.44b) bağıntılarından;

$$\Im\left[f(t)\cos(w_0t)\right]=\frac{1}{2}F(w-w_0)+\frac{1}{2}F(w+w_0) \qquad (5.45)$$

yazılabilir.

Örnek 5.9
T uzunluğundaki kosinüs işlevinin FD nü (Şekil 5.18) bulunuz.

$f(t)=\cos(w_0t)$ işlevini, işlevin dönemi uzunluğundaki (T) bir boya sahip dikdörtgen pencere işlevi kullanarak sınırlayalım.

$$P_d(t)=\begin{cases}1 & |t|<T/2\\ 0 & |t|>T/2\end{cases}$$

Dikdörtgen pencerenin FD, Örnek 5.1 de bulunmuştu.

$$\Im\left[P_d(t)\right]=\frac{2}{w}\sin\left(\frac{wT}{2}\right)$$

(5.45) bağıntısında f(t)=Pd(t) konarak

$$\Im\left[P_d(t)\cos(w_0t)\right]=\frac{\sin\left[\frac{T}{2}(w-w_0)\right]}{w-w_0}+\frac{\sin\left[\frac{T}{2}(w+w_0)\right]}{w+w_0} \qquad (5.46)$$

elde edilir. f(t) işlevinin dönemi (-T/2 den T/2 ye dek sürdüğü için) "T" dir. Dolayısı ile İşlevin temel açısal frekansı aşağıda verilmektedir.

$$w_0=\frac{2\pi}{T}\rightarrow T=\frac{2\pi}{w_0}$$

Pencere boyu olan T süreci içindeki dönem sayısı ise $T/(2\pi/w_0)$ dır. Öyleyse T zaman aralığında $w_0T/2\pi$ kadar tam dalga vardır. Bu nedenle w_0T çarpanı ne kadar büyük olursa T zaman aralığında o kadar çok sayıda dalga bulunur. $w_0T>>1$ durumunda f(t) izinin FD Şekil 5.19 daki gibi olur. (5.46) dan görüldüğü gibi sinyalin spektrumu $w=+w_0$ ve $w=-w_0$ merkezler olmak üzere iki sinc işlevidir. sinc işlevlerinin maksimum değerleri $w=w_0$ ve $w=-w_0$ dadır. Maksimumların iki tarafındaki birinci minumumlar arasında $2\pi/T$, diğer ardışık minumumlar arasında ise π/T frekans farkı vardır.

Bu problemde aynı sonuca ulaşır gibi görünen iki önemli nokta vardır. Bunlardan birincisi f(t) işlevinin dönemi olan "T" dir. İkincisi ise dikdörtgen pencerenin boyu olan "T" dir. Burada pencere boyu, izin dönemine eşit alınmıştır. Pencere boyu ve sinyalin dönemi arasındaki ilişkilerin ne olduğu konusuna pencereler bölümünde değinilecektir. Bu problemde konunun fazla içeriğine girilmeden aşağıdaki bilgilerle yetinilecektir.

Eğer pencere boyu olan T büyük ise minumumlar sık aralıklı, küçük ise geniş aralıklı olur. $w_0T>>1$ olması durumunda eğriler çabuk sönerler, kolların birbirlerine etkisi olmaz.

Eğer w_0 (işlevin dönemi) sabit tutulup pencere boyu küçültülürse minumumlar arasındaki uzaklık artarak eğriler yassılaşır. İşlevin dönemi olan w_0 sabit tutulup pencere boyu büyültülürse minumumlar birbirine yaklaşır. Pencere boyunun limitte sonsuza ulaşması durumunda ise sinc işlevi $w = +w_0$ ve $w = -w_0$da bulunan birer doğru parçası üzerinde toplanırlar (Şekil 5.20).

Eğer f(t) işlevinin dönemi küçük ise temel frekans olan "w_0" merkezden çok uzak, dönem büyük ise temel frekansın ilk değeri merkeze çok yakın olur. Öz olarak;

1. pencere boyunun genişliği veya darlığı; sinc işlevinin dikliği, yayvanlığı ve lobların birbirlerine yakınlığına,

2. sinyalin döneminin uzun veya kısa olması da ilk temel frekans değerinin, sıfır frekansına yakın veya uzak olmasını ilgilendirir. Burada pencere boyunun büyüklüğü de aynı şekilde etki eder.

Örnek 5.10
"+" ve "-" yönde "t_0" kadar ötelenmiş aynı bir dalgacığın toplamlarının ve farklarının spektrumunu bulunuz.

$$\Im[f(t-t_0)+f(t+t_0)] = \Im[f(t-t_0)] + \Im[f(t+t_0)]$$
$$\Im[f(t \pm t_0)] = F(w)e^{(\pm jwt_0)}$$

$$e^{(-jwt_0)} = \cos(wt_0) - j\sin(wt_0)$$
$$e^{(jwt_0)} = \cos(wt_0) + j\sin(wt_0)$$

$$e^{(-jwt_0)} + e^{(-jwt_0)} = 2\cos(wt_0)$$
$$e^{(-jwt_0)} - e^{(-jwt_0)} = 2j\sin(wt_0)$$

$$F(w)\left[e^{(-jwt_0)} + e^{(jwt_0)}\right] = 2F(w)\cos(wt_0)$$ (toplamların spektrumu)

$$\Im[f(t-t_0)-f(t+t_0)] = \Im[f(t-t_0)] - \Im[f(t+t_0)]$$
$$F(w)\left[e^{(-jwt_0)} + e^{(jwt_0)}\right] = 2jF(w)\sin(wt_0)$$ (farkların spektrumu)

---

6. Bakışım (simetri) özelliği

$$f(w) = \Im[f(t)]$$
$$\Im[F(t)] = 2\pi f(-w)$$

dır.
Kanıtlama:

Ters Fourier dönüşüm (TFD) bağıntısı,

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{(jwt)}\,dw$$

dır.

$$2\pi f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{(jwt)}\,dw$$

$t=-t$ konursa

$$2\pi f(-t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{(-jwt)}\,dw$$

$t=w$ ile yer değiştirilirse

$$2\pi f(-w)=\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{(-jwt)}\,dt=\Im[F(t)]$$

elde edilir.

Örnek 5.11

$$f(t)=e^{-\alpha t} \quad , \quad F(w)=\Im[f(t)]=F(w)=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+w^2}$$

bağıntıları bilindiğine göre;

$$f(t)=\frac{1}{\alpha^2+t^2}$$

nin FD nü bulunuz.

$$F(w)=\Im[f(t)]=\Im\left(\frac{1}{\alpha^2+t^2}\right)=?$$

Bakışım özelliği;

$$\Im[F(w \to t)] = 2\pi f(t \to -w)$$
$$F(w) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + w^2} \to F(w \to t) = F(t) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2}$$
$$f(t) = e^{-\alpha t} \to f(t \to -w) = f(-w) = e^{\alpha w}$$

dir. Bu bağıntılar bakışım özelliğinde yerine yazılırsa,

$$\Im\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + t^2}\right) = 2\pi e^{\alpha w}$$

elde edilir. Oysa aranan bağıntı

$$\Im\left(\frac{1}{\alpha^2 + t^2}\right)$$

dir. Üstteki denklemde "α" sabit olduğundan,

$$\Im\left(\frac{1}{\alpha^2 + t^2}\right) = \frac{2\pi}{\alpha} e^{\alpha w}$$

elde edilir.

Örnek 5.12
Bir dikdörtgen pencerenin zaman ve frekans ortamı bağıntıları aşağıda verilmektedir.

$$P_d(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \tag{5.48}$$
$$\Im[P_d(t)] = \frac{2}{w}\sin\left(\frac{wT}{2}\right) \tag{5.49}$$

Bu bağıntılar bilindiğine göre;

$$f(t) = \frac{\sin(at)}{\pi t} \tag{5.50}$$

işlevinin FD nü bakışım özelliğini kullanarak bulunuz.

(5.50) de verilen işlev (5.49) bağıntısına (Fourier dönüşüm çifti bilinen bağıntılardan frekans ortamındaki olanına) benzetilmeye çalışılır. (5.50) bağıntısında a=d/2 konulursa

$$f(t) = \frac{1}{\pi t}\sin\left(\frac{dt}{2}\right) \tag{5.51}$$

katsayılar dışında (5.51) bağıntısı [dolayısı ile (5.50)] ile (5.49) bağıntıları birbirlerine benzemektedir. Tek fark (5.51) bağıntısı zaman, (5.49) bağıntısı ise frekans ortamındadır. FD nün bakışım özelliği ise;

$$\Im[F(w \to t)] = 2\pi f(t \to -w)$$

dir. Bakışım özelliğinin 1. kısmını oluşturalım. Bunun için (5.49) bağıntısında;

$$F(w) = \frac{2}{w}\sin\left(\frac{wd}{2}\right) \to F(w \to t) = F(t) = \frac{2}{t}\sin\left(\frac{td}{2}\right) \tag{5.52}$$

(5.48) denkleminden yararlanarak;

$$P_d(t \to -w) = P_d(-w) = \begin{cases} 1 & |w| < 1/2\,d \\ 0 & |w| > 1/2\,d \end{cases}$$

yazılabilir. O zaman bu işlev çift işlevdir, yani

$$P_d(w) = \begin{cases} 1 & |w| < d/2 \\ 0 & |w| > d/2 \end{cases}$$

a=d/2 olarak tanımlanmıştı, buradan da d=2a dır.

$$P_{2a}(w) = \begin{cases} 1 & |w| < a \\ 0 & |w| > a \end{cases} \tag{5.53}$$

Bakışım özelliğinin 2. kısmı ise:

$$2\pi f(t \to -w) = 2\pi P_d(w)$$

tanımından dolayı $P_d(-w)$ çift işlev olduğundan, $P_d(-w)=P_d(w)$ yazılabilir.

$$\Im\left[\frac{2}{t}\sin\left(\frac{dt}{2}\right)\right] = 2\pi P_d(w)$$

$$\Im\left[\frac{\frac{2\sin(td/2)}{t}}{2\pi}\right] = \Im\left[\frac{2\sin(td/2)}{\pi t}\right] = P_d(w)$$

bağıntılarında d=2a koyarak;

$$\Im\left[\frac{\sin(at)}{\pi t}\right] = P_{2a}(w)$$

dır. $P_{2a}(w)$ ise (5.53) bağıntısı ile verilmektedir.

5.5 EVRİŞİM (CONVOLUTION) KURAMI

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\tau) d\tau \tag{5.54a}$$

(5.54a) denklemi ile verilen f(t) işlevine (-∞,∞) aralığında $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ işlevlerinin evrişimi denir. Eğer t<0 için $f_1(t) = 0$ ve $f_2(t) = 0$ ise (5.54a) denklemi

$$f(t) = \int_{0}^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \tag{5.54b}$$

denklemine dönüşür. Burada,

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) \tag{5.55}$$

olarak gösterilir (Şekil 5.21).

a. Zaman evrişim kuramı

$$F_1(w) = \Im[f_1(t)] \quad , \quad F_2(w) = \Im[f_2(t)]$$

ise

$$\Im[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(w) F_2(w) \tag{5.56}$$

dır. Ters bağıntı ise aşağıdaki şekildedir.

$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(w) F_2(w) e^{jwt} \, dw \tag{5.57}$$

b. Frekans evrişim kuramı

$$f_1(t) = \Im^{-1}[F_1(w)] \quad , \quad f_2(t) = \Im^{-1}[F_2(w)]$$

ise

$$\Im[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(w) * F_2(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(w-u) du \tag{5.58}$$

Not: $w - u = \tau$ dönüşümü yapılmıştır.

---

bağıntıları elde edilir. Zaman ve frekans ortamı evrişim işlemleri Şekil 5.21 de görülmektedir.

Örnek 5.13
Frekans ortamında $F_1(f)$ ve $F_2(f)$ iki işlevin evrişimi

$$F_{12}(f) \equiv \int_{\tau=-\infty}^{\infty} F_1(\tau)F_2(\tau)d\tau \equiv F_1(f)*F_2(f)$$

olarak verilmektedir. Evrişimin, zaman ortamında her iki işlevin bire bir çarpımı olduğunu gösteriniz.

Bu bağıntının TFD

$$f_{12}(t) = \int_{f=-\infty}^{\infty} F_{12}(f)e^{2\pi jft}\,df$$

$$f_{12}(t) = \int_{f=-\infty}^{\infty}\left[\int_{\tau=-\infty}^{\infty} F_1(\tau)F_2(f-\tau)d\tau\right]e^{2\pi jft}\,df$$

$$f_{12}(t) = \int_{f=-\infty}^{\infty}\left[\int_{\tau=-\infty}^{\infty} F_2(f-\tau)e^{2\pi jft}\,df\right]F_1(\tau)d\tau$$

$$f-\tau = x \to f = x+\tau \to df = dx$$

$$f_{12}(t) = \int_{f=-\infty}^{\infty}\left[\int_{x=-\infty}^{\infty} F_2(x)e^{2\pi jt(x+\tau)}\,dx\right]F_1(\tau)d\tau$$

$$f_{12}(t) = \int_{f=-\infty}^{\infty}\left[\int_{x=-\infty}^{\infty} F_2(x)e^{2\pi jtx}\,e^{2\pi jt\tau}\,dx\right]F_1(\tau)d\tau$$

$$f_{12}(t) = \int_{f=-\infty}^{\infty}\underbrace{\left[\int_{x=-\infty}^{\infty} F_2(x)e^{2\pi jtx}\,dx\right]}_{f_2(t)}F_1(\tau)e^{2\pi jt\tau}d\tau$$

$$f_1(t) = \int_{f=-\infty}^{\infty} F_1(\tau)e^{2\pi jt\tau}\,d\tau$$

olduğundan

$$f_{12}(t) = [f_1(t)][f_2(t)]$$

elde edilir.

---

c. Evrişim tümlevinin özellikleri

Evrişim tümlevinin temel özellikleri

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$$
$$f_1(t)*[f_2(t)*f(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f(t) \quad (5.59)$$
$$f_1(t)*[f(t)*f_2(t)]=f_1(t)*f(t)+f_1(t)*f_2(t)$$

d. Evrişim, aşağıdaki gibi dört aşamada incelenmiştir.

1) Seriler ile.
2) Katlama yolu ile.

3) Analitik denklemi belli sinyaller ile.
4) z dönüşümleri ile (Bkz Bölüm 7 Örnek 10).

Serilerle evrişim

İki seri;

$$A = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B = b_0 + b_1x + b_2x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

olsun. Bunların evrişimleri;

$$a_0(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots) + a_1x(b_0 + b_1x + b_2x^2 \ldots\ldots) + a_2x^2(b_0 + b_1x + b_2x^2 \ldots\ldots) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

dır. Burada;

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0b_0 \\ c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 \\ c_2 &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 \\ c_3 &= a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad (5.60)$$

olarak gösterilirse evrişim sonucu bulunan yeni seri;

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \quad (5.61)$$

denklemi ile elde edilir.

Örnek 5.14

$$A = [a_0, a_1] \quad , \quad A = [1,2]$$
$$B = [b_0, b_1, b_2] \quad , \quad B = [1,2,3]$$

A dalgacığı ile B dalgacığının evrişimini seriler yöntemi ile bulunuz.

B dalgacığı aynen alınır, A dalgacığı ise ters çevrilerek Şekil 5.22 deki gibi (5.60) denklemlerine uygun olarak evriştirilir.

Katlama ile evrişim

(5.60) denklemleri incelediğinde, evrişimin aynı zamanda bir katlama işleci olduğu da anlaşılır. (5.60) denklemlerinde verilen üç boylu A ve B dalgacıklarının evrişimi, bir katlama olarak Şekil5.23 deki gibi düşünülebilir.

Örnek 5.15
Sayısal örnek olarak yukarıda verilen iki dalgacığın evrişimini katlama yolu ile bulunuz.

Yapılan uygulama sonucu elde edilen sonuç Şekil 5.24 te verilmektedir.

Not: Seriler ile evrişimde dalgacıklardan biri aynen alınır diğeri ters çevrilerek evrişime sokulur. Katlama yöntemi uygulanırken iki dalgacık ta aynen alınarak evrişime sokulur.

Analitik denklemleri belli olan işlevlerin evrişimi

Eğer evriştirilecek işlevlerin analitik denklemleri belli ise (5.54) denklemi kullanılarak evrişim sonucu bulunur.

Örnek 5.16
$f_1(t)$ ve $f_2(t)$ işlevleri denklemleri ile birlikte Şekil 5.25 te verilmektedir. Bunların evrişimini bulunuz.

Evrişim sırasında 1. işlev aynen alınır, 2. işlev ters çevrilir (Şekil 5.26). (5.54) bağıntısından,

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

$$f(t)=\int_{0}^{t} a\,e^{\alpha t}\, b\,e^{[-\beta(t-\tau)]}\,d\tau$$

$$f(t)=a\,b\int_{0}^{t} e^{\alpha t}\; e^{-\beta t}\, e^{-\beta\tau}\,d\tau$$

$$f(t)=\frac{a\,b\,e^{-\beta\tau}}{\beta-\alpha}\left|e^{(\beta-\alpha)\tau}\right|_{\tau=0}^{t}$$

$$f(t)=a\,b\,\frac{e^{-\beta\tau}\,e^{(\beta-\alpha)\tau}-e^{0}}{\beta-\alpha}=a\,b\,\frac{e^{\alpha t}-e^{-\beta\tau}}{\beta-\alpha}$$

elde edilir.

---

e. Evrişimin geometrik olarak gösterimi

Doğrusal bir sistemin dürtü yanıtı h(t) ve giriş izi x(t) Şekil 5.27 de verilmektedir. y(t) çıkış izinin geometrik olarak hesaplanması ve değişimi aşağıda sunulmaktadır.

Doğrusal dizgenin çıktısı (Şekil 5.28) bilindiği gibi evrişim tümlevinden hesaplanır. (5.54) ve (5.55) denklemlerinden

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \qquad -\infty < t < \infty$$

den bulunmaktadır. Burada önemli nokta $h(t-\tau)$ işlevini "τ" değişkenine bağlı olarak çizmektir. "t" değişkeni -∞ dan +∞ a değiştikçe, $h(t-\tau)$ işlevide τ ekseni üzerinde kayacaktır. Bu işlevi çizebilmek için aşağıdaki yol izlenir.

1. h(t) şlevi Şekil 5.29 da verilmiştir. $t = \tau$ dönüşümü yapılır. h(-τ) işlevi ise evrişimin katlanma özelliğinden dolayı düşey eksende katlanır (Şekil 5.30).

2. "t" sabit, gerçel bir sayı olarak düşünülür ve

$$h(t-\tau) = h[-(t-\tau)]$$

işlevi çizilir. Bu işlev aslında h(-τ) işlevinin "τ" ekseni üzerinde "t" kadar ötelenmesi ile elde edilir. Eğer t>0 ise sağa doğru, t<0 ise sola doğru ötelenir (Şekil 5.31 ve 5.32).

3. x(τ) işlevi de aynı grafik üzerine çizilir. Her iki işlevin çarpımlarının sıfır olmadığı bölgede tümlev alınır. Bu işlem "t" parametresinin (+) ve (-) tüm değerleri için yapılır.

Evrişim tümlevinin hesaplanması için yukarıda açıklanan yöntemi verilen bu örneğe uygulayalım: Her iki işlev de "t" ortamındayken, eksen üzerindeki değerlerinden yararlanarak, t'nin ait olduğu bölgelerin alt ve üst sınırları saptanır. Örneğimizde dört adet bölge saptanmıştır (Şekil 5.33). Daha sonra her iki işlev 1. ve 2. adımda anlatıldığı gibi "τ" ortamına aktarılarak tümlev alınır. Tümlevlerin alt ve üst sınırları ait oldukları bölgelerin alt ve üst sınırlarıdır.

a. 0<t<1/2 için (Şekil 5.34); kolaylık olması açısından örneğin t=1/4 birim seçilsin. x(τ) ve h(t-τ) çarpımlarının sıfır olmadığı bölge taralı alandır. Dolayısı ile bu bölgede tümlev alınır. Bunun için h(t-τ) doğrusunun denklemi bulunur.

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{\tau-\tau_1}{\tau_1-\tau_2} \rightarrow \frac{y-1/2}{1/2-0} = \frac{\tau-(-2+t)}{(-2+t)-(-1/2+t)}$$

$$y = -\frac{1}{3}\tau + \frac{1}{3}t - \frac{1}{6}$$

$$h(t-\tau) = -\frac{1}{3}\tau - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}t$$

(5.62) denkleminden;

$$y(t) = \int_{-1}^{-1/2+t} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\tau + \frac{1}{3}t - \frac{1}{6}\right)d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{3}\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau}{6} + \frac{\pi t}{3}\right|_{\tau=-1}^{-1/2+t}$$

$$y(t) = \frac{1}{12}\left[(t-1/2)^2 + 2t\right] \qquad (5.63)$$

b. $\frac{1}{2} < t < 1$ için (Şekil 5.35);

$h(t-\tau)$ denklemi (a) da bulunmuştur.

$$h(t-\tau) = -\frac{1}{3}\tau - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}t$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\tau - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}t\right)d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{3}\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau}{6} + \frac{t\tau}{3}\right|_{-1}^{0}$$

$$y(t) = \frac{t}{6} \qquad (5.64)$$

c. 1<t<2 için (Şekil 5.36);

$$y(t) = \int_{-2+t}^{0} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\tau - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}t\right)d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{3}\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau}{6} + \frac{t\tau}{3}\right|_{-2+t}^{0}$$

$$y(t) = -\frac{1}{12}(t-2)(t-1) \qquad (5.65)$$

d. 2<t<∞ için (Şekil 5.37);

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\tau - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}t\right)d\tau$$

$$y(t) = 0 \qquad (5.66)$$

e. Bu kez de t<0 değerleri için y(t) nin değişimini inceleyelim. t nin mutlak değeri büyüdükçe $h(t-\tau)$ işlevi de sola doğru kayar (Şekil 5.38).

$$-\frac{1}{2} < t < 0$$

$$y(t) = \int_{-1}^{-1/2+t} \frac{1}{2}\left(-\frac{\tau}{3} - \frac{1}{6} + \frac{t}{3}\right) d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{12}\left[\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2t\right] \qquad (5.67)$$

f. $-\infty < t < -1/2$ için

$$y(t) = 0 \qquad (5.68)$$

dır. y(t) nin çıkış işlevi ise hesaplanan bölgelerde çizilir.

$-\infty < t < -1/2$	arası (5.68) bağıntısından	$y(t) = 0$
$-1/2 < t < 0$	arası (5.67) bağıntısından	$y(t=0) = 1/48$
$0 < t < ½$	arası (5.63) bağıntısından	$y(t=1/2) = 1/12$
$1/2 < t < 1$	arası (5.64) bağıntısından	$y(t=1) = 1/6$
$1 < t < 2$	arası (5.65) bağıntısından	$y(t=2) = 0$
$2 < t < \infty$	arası (5.66) bağıntısından	$y(t) = 0$

dır. Yapılan hesaplamalar sonucu elde edilen alan Şekil 5.39 da verilmektedir.

5.6 SİNYALLERİN ENERJİ, GÜÇLERİNİN HESAPLANMASI VE PARSEVAL KURAMI

5.6.1 Giriş

Jeofizikte, ister uzay, ister zaman ortamında olsun izler sonsuz uzunluktadır. Bu nedenle kullanılan x(t), y(t), g(x), H(x), V(x) gibi izler genellikle $-\infty$ dan $+\infty$ a kadar uzanan zamanın veya uzayın sürekli ya da kesikli bir işlevi şeklinde modellenir. Ancak bu tür izlerin modellenebilmesi için (5.11c), (5.11d) veya (5.69) denklemlerinden en az birini sağlamalıdır [(5.11c) gerçel ve (5.11d) de karmaşık işlevlerde kullanılır].

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt < \infty \qquad \text{enerjileri sonlu sinyaller (enerji sinyalleri)}$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t)\,dt < \infty$$

veya

$$P = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt < \infty \qquad \text{ortalama gücü sonlu (güç sinyalleri)} \qquad (5.69)$$

(5.11c) ve (5.69) denklemlerinin anlamlarının açıklanabilmesi için aşağıdaki örnek verilmiştir.

R=1Ω direncine sahip bir akım kaynağının gerilimi f(t) olsun.

Ohm yasasından $I = \dfrac{V}{R} \rightarrow I^2 = \dfrac{V^2}{R^2}$

güç bağıntısı ise $P = RI^2 \rightarrow P = \dfrac{V^2}{R}$

R=1Ω olduğundan, gerilimin karesi devrenin gücünü verir.

$P = V^2$ veya $P = |f(t)|^2$

dir. (5.11c) denkleminden;

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = V^2$$

dir. Bu da kaynağın verdiği toplam enerjidir. Yukarıdaki denklem 1Ω luk bir direnç üzerindeki ir f(t) geriliminin (veya 1Ω luk bir dirençten geçen bir f(t) akımının) açığa çıkardığı toplam enerjidir. Bilindiği gibi (5.11c) tümlevinin anlamlı olabilmesi için sonlu olması gerekir. Bölüm 5.2 den anımsanacağı gibi dönemli işlevler için (5.11c) tümlevi sonlu değildir. Bu tip sinyaller için enerjinin zaman ortalaması tanımlanır. Bu da izin ortalama gücüdür ve (5.69) denklemi ile verilir.

(5.69) denklemi ile verilen bir f(t) izinin, ortalama gücü 1Ω luk bir dirence uygulanan f(t) geriliminin (veya 1Ω luk dirençten geçen f(t) akımının) tükettiği ortalama güç olarak tanımlanır.

Enerjisi sonlu olan izlerin (5.11c) bağıntısı ile tanımlanan enerjisi, f(t) nin FD den yararlanarak ta bulunabilir. Bazı durumlarda enerjinin bu yoldan hesaplanması daha kolay olabilir.

5.6.2 Parseval kuramı

Parseval kuramı dönemli ve dönemsiz işlevlerde ayrı ayrı incelenir.

Dönemli bir işlevin gücü ve ayrık (süreksiz) Fourier spektrumu

Eğer f(t) işlevi gerçel ve T dönemli ise:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \qquad (5.70)$$

T dönemli f(t) işlevinin gücü — Karmaşık Fourier serisinin katsayıları

denklemi yazılır. Yani dönemli bir işlevin gücü, karmaşık Fourier katsayılarının mutlak karelerinin toplamına eşittir. (5.70) bağıntısında

$$|C_n| = \frac{1}{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right)^2$$

konursa

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2\, dt = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)^2 \qquad (5.71)$$

elde edilir. Bilindiği gibi,

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \text{ aritmetik ortalama}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2\, dt = \text{ karesel ortalama}$$

dır. (5.71) bağıntısına Parseval eşitliği denir. Bağıntının anlamı, dönemli bir işlevin karesel ortalama değeri, diğer harmoniklerin karelerinin toplamına eşittir.

Dönemi bilinmeyen işlevin spektrumu (enerji spektrumu)

Dönemi bilinmeyen işlevlerin spektrumu süreklidir (enerji spektrumu). Eğer f(t) işlevi dönemsiz ve gerçel bir işlev ise:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2\, df \qquad (5.72)$$

olarak verilir. Bu denklem dönemsiz işlevlere ait PARSEVAL eşitliğidir. Bilindiği gibi (5.11b) denklemi:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt$$

enerji tanımını vermektedir. Dolayısı ile (5.72) denklemi sinyalin enerjisini verir. Yani;

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2\, df \quad , \quad f = \frac{w}{2\pi} \rightarrow df = \frac{1}{2\pi}dw \qquad (5.73)$$

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2\, dw \qquad (5.74)$$

denklemlerinden de bulunabilir. Burada,

$$F(w) = \Im[f(t)]$$

$$S(w) = |F(w)|^2 \qquad (5.75)$$

olarak tanımlanabilir. S(w), x(t) işlevinin enerji spektrumu veya spektral enerji yoğunluğudur. Birimi joule/Hz dir. Fiziksel olarak S(w), f(t) izinin enerjisinin ne miktarda ve hangi frekans binlerinde bulunduğunu belirtir. Başka bir deyişle verinin enerjisinin hangi frekanslarda yoğunlaştığını gösterir.

S(w) nın özellikleri

1. $S(w) \geq 0$ ve w nin gerçel bir işlevidir [çünkü S(w), her bir binde taşınan enerjiyi gösterir].

2. S(w), w nın daima çift işlevidir [S(w)=S(-w)].

5.6.3 Çapraz enerji spektrumu

Dönemsiz işlevler için tanımlanan (5.72) veya (5.11b) denkleminde $|f(t)|^2$ işlevi gerçel çift işlevdir. İşlevin karmaşık olması durumunda (5.11d) denkleminden yararlanarak

$$|f(t)|^2 = f(t)f^*(t) \tag{5.76a}$$

$$f^*(t) = f(-t) \tag{5.76b}$$

dır. O zaman (5.72) denkleminin sağ tarafı

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)F^*[-(-w)]dw \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)F^*(w)dw\end{aligned} \tag{5.77}$$

Not: f

$$f(t)f^*(t) = |f(t)|^2$$

$$F(w)F^*(w) = |F(w)|^2$$

dir.

---

olarak yazılabilir. Bu işlevler "t" ve "w" ortamlarında birbirlerine eşittir. (5.76a) denkleminin spektrumu gerçel ve çifttir. Bu özel bir durumdur. Özel olan bu durum genelleştirilirse iki ayrı işlev olan $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ alınmalıdır. O zaman (5.77) bağıntısı

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1^*(w)F_2(w)dw \tag{5.78}$$

haline gelir. Bu denklemde,

$$E_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} F_1^*(w)F_2(w)dw = F_1^*(w)F_2(w) \tag{5.79a}$$

veya,

$$E_{1,2} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F_1^*(w) F_2(w) dw \tag{5.79b}$$

dır. (5.78) eşitliğinden hareketle de

$$f_1(t) f_2(t) = \frac{F_1^*(w) F_2(w)}{2\pi} \tag{5.79c}$$

yazılabilir. (5.79) denklemlerindeki $E_{1,2}$ ye çapraz enerji spektrumu denir.

Örnek 5.16
Bir f(t) izinin enerji yoğunluk spektrumu

$$|F(w)|^2 = 10^{-10} w^2$$

joule/Hz olarak verilmiştir.

a. $w_0 = 2\pi 10^4$ rad/sn binindeki enerji yoğunluğunu,
b. $\pm 2\pi 10^4$ rad/sn ile $\pm 4\pi 10^4$ rad/sn frekansları arasında kalan bölgelerdeki izin enerjisini bulunuz.

a. $|F(w)|^2 = 10^{-10}(2\pi 10^4)^2 = 10^{-10} 4\pi^2 10^8 = 4\pi^2 10^{-2}$ Joule/Hz

b. iki adet frekans bölgesi vardır. Bunlar,

$-4\pi 10^4 < f < -2\pi 10^4$ ve $2\pi 10^4 < f < 4\pi 10^4$ dır.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw &= \frac{1}{2\pi}\int_{-4\pi 10^4}^{-2\pi 10^4} 10^{10}\, w^2\, dw + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi 10^4}^{4\pi 10^4} 10^{-10}\, w^2\, dw \\
&= \frac{10^{-10}}{6\pi}\left[\left| w^3 \right|_{-4\pi 10^4}^{-2\pi 10^4} + \left| w^3 \right|_{2\pi 10^4}^{4\pi 10^4} \right] = \frac{10^{-10}}{6\pi}\left[128\pi^3\, 10^{12} - 16\pi^3\, 10^{12}\right] \\
&= \frac{10^{-10}}{6\pi}\pi^3\, 10^{12}(128-16) = 18423 \text{ joule/Hz.}
\end{aligned}$$

Örnek 5.17
Aşağıda tanımlanan f(t) işlevinin spektrumu F(w) bilindiğine göre f(t) izinin enerjisini hesaplayınız.

$$f(t)=\begin{cases}1 & |t|<a\\ 0 & |t|>a\end{cases}$$

$$F(w)=\Im[f(t)]=\frac{2\sin(aw)}{w}$$

(5.72) denklemlerinden yararlanarak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2\sin(aw)}{w}\right]^2 dw$$

$$|t|_{-a}^{a}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\sin^2(aw)}{w^2}dw$$

$$2a=\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(aw)}{w^2}dw$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2(aw)}{w^2}dw=\frac{\pi a}{2}$$

elde edilir. Son denklemde aw=u dönüşümü yapılırsa.

$$aw=u \quad , \quad w=\frac{u}{a} \quad , \quad dw=\frac{1}{a}du$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2(u)}{u^2}du=\frac{\pi}{2}$$

bulunur.

Örnek 5.18

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

tümlevini Parseval eşitliğini kullanarak hesaplayınız.

Not:

$$\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{dx}{x^2+1}\frac{1}{x^2+1}$$

şeklinde yazılıp bağıntının sağ tarafının ikinci teriminde x=w konursa,

$$\frac{dx}{x^2+1}=\frac{dw}{w^2+1}$$

elde edilir. Bu işlev ise e^{-x} Fourier kosinüs dönüşümüdür (FCD).

---

e^{-x} in FCD alınırsa (x>0 için),

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(wx)dx = \frac{dw}{w^2+1}$$

dir. Parseval kuramından,

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} |F(w)|^2 dw$$

$$\int_0^{\infty} \left|e^{-x}\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{w^2+1}\right)^2 dw$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{w^2+1}\right)^2 dw$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\left|e^{-2x}\right|_{x=0}^{\infty} = -\frac{1}{2}\left[e^{-\infty} - e^{0}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{w^2+1}\right)^2 dw$$

$$\pi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{w^2+1}\right)^2 dw$$

elde edilir. Bu denklemde $w = x, dw = dx$ ve $w^2 = x^2$ konursa

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{w^2+1}\right)^2 dw = \pi$$

bulunur.

Aynı problem başka bir yoldan aşağıdaki gibi de çözülebilir. Önce,

$\dfrac{1}{x^2+1}$ in FD bulunur.

$$F(w) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-jwx}}{x^2+1}dx$$

bağıntısında z=jx dönüşümü yapılırsa

$$z^2 = -x^2 \qquad dz = j\,dx$$

$$x^2 = -z^2 \qquad dx = \frac{dz}{j}$$

$$F(w) = \frac{1}{j}\int_0^{\infty} \frac{e^{-wz}}{1-z^2}\,dw$$

elde edilir. Rezidü kuramından,

$$\int_0^{\infty} f(z)dz = 2\pi j a_{-1}$$

$$a_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

dir. Buradan da

$$a_{-1} = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^{-wz}}{(z-1)(z+1)}$$

$$= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^{-w}}{(z-1)(z+1)} = -\frac{e^{-w}}{2}$$

$$= \int_0^{z} f(z)dz = 2\pi j\frac{1}{j}\frac{-e^{-w}}{2} = \pi e^{-w}$$

bulunur. Yani

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

iken

$$f(w) = -\pi\, e^{-w}$$

dir. Parseval kuramından yararlanarak ta

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} |F(w)|^2\,dw$$

$$|f(x)|^2 = \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

olarak alalım:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(-\pi e^{-w}\right)^2 dw$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \pi^2 e^{-2w}dw = \frac{1}{2\pi}\pi^2\int_0^\infty e^{-2w}dw$$

$$\int_0^\infty e^{-2w}dw = -\frac{1}{2}\left[e^{-2w}\right]_{w=0}^{\infty} = -\frac{1}{2}\left(e^{\infty} - e^{0}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

bulunur.

Örnek 5.19

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

tümlevini parseval eşitliğini kullanarak hesaplayınız.

Not:

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

bağıntısında $x = w$, $dx = dw$ dönüşümü yapılırsa:

$$F(w) = \int_0^\infty \frac{w^2}{\left(w^2+1\right)^2}dw$$

elde edilir. Bu ise:

$$F(w) = \Im_s\left[f(x) = e^{-x}\right] = \frac{w}{w^2+1}$$

dır. Yani:

$$F(w) = \Im_s\left[f(x) = e^{-x}\right] = \int_0^\infty e^{-x}\sin(wx)dx = \frac{w}{1+w^2} \quad \text{dir.}$$

$f(x) = e^{-x}$ işlevinin sinüs dönüşümü:

$$F(w) = \Im_s\left[f(x) = e^{-x}\right] = \underbrace{\int_0^\infty e^{-x}\sin(wx)dx}_{\Im_s\left(e^{-x}\right)} = \frac{w}{1+w^2} \quad \text{dir.}$$

Parseval eşitliği ise:

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |F(w)|^2\, dw \ \text{ dir.}$$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx$$

de x→w konursa

$$F(w) = \int_0^\infty \left(\frac{w}{w^2+1}\right)^2 dw$$

elde edilir.

$$\int_0^\infty \frac{w}{w^2+1}\, dw = \Im_s\left(e^{-x}\right)$$

idi. Öyleyse, Parseval eşitliğinde:

$$|f(x)|^2 = \left|e^{-x}\right|^2$$

yazılabilir.

$$\int_0^\infty \left|e^{-x}\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{w}{w^2+1}\right)^2 dw$$

$$\int_0^\infty e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\left| e^{-2x} - e^{-2x}\right|_{x=0}^{\infty} = -\frac{1}{2}\left(e^{-\infty} - e^{-2x}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{w}{w^2+1}\right)^2 dw$$

bağıntısında $w = x\,, dw = dx$ dönüşümü yapılırsa;

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx = -\pi$$

elde edilir.

5.6.4 Özilişki İşlevi

Sonlu ortalama güçlü izlerin (5.12) bağıntısı ile verilen ortalama güçleri özilişki işlevleri ile daha kolay yoldan bulunabilir. (5.69) bağıntısı limit durumunda

$$P = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \lim_{\tau\to 0} f(t+\tau)dt$$

olarak yazılabilir.

$$P \cong \lim_{\tau\to 0}\left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t+\tau)dt\right]$$

$$R(\tau) \cong \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t+\tau)dt \qquad (5.80a)$$

veya

$$R(\tau) \cong \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t-\tau)dt \qquad (5.80b)$$

bulunur. (5.80) denklemleri ile verilen R(τ) işlevine f(t) nin özilişki işlevi denir. (5.80) denklemleri biraz daha basitleştirilerek T nin limitte sonsuza gitmesi durumunda 1/T çarpanına gerek kalmadan kullanılabilir.

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt \qquad (5.80c)$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)dt \qquad (5.80d)$$

Özilişki, bir işlevin kendi kendine evrişiminden başka bir şey değildir. Dolayısıyla (5.80c) ve (5.80d) denklemlerine aynı bir f(t) işlevinin kendi kendine evrişiminden de ulaşılabilinir. (5.54a) denkleminde $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ alınması durumunda evrişim bağıntısı

$$R(t) = f(t) * f^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f^*(t \pm \tau)d\tau \qquad (5.81)$$

durumuna gelir. Bölüm 5.5 ten anımsanacağı gibi evrişime giren işlevlerden bir tanesi ters çevrilerek işleme sokulur. Eğer işlev ters çevrilmeden kullanılacak olursa,

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)dt \qquad (5.82)$$

durumuna gelir. (5.82) denkleminden görüldüğü gibi özilişki (R), kaymanın (τ) bir işlevidir.

Gerçel izler için (5.82) denklemleri ile verilen özilişki karmaşık işlevler içinde yazılabilir. (5.81) denklemleri kullanılarak

$$R(t) = f(t) * f^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f^*(t \pm \tau)d\tau \qquad (5.83)$$

veya

$$R(t) = f^*(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\tau) f(t \pm \tau) d\tau \qquad (5.84)$$

elde edilir.

Spektral enerji yoğunluk işlevleri, Wiener-Kitchen bağıntıları kullanılarak özilişki işlevlerinden de bulunabilir (Bkz Bölüm 5.8). Bir f(t) izinin özilişkisi Şekil 5.40 ta verilmektedir.

Bazı durumlarda özilişki işlevi yerine normalleştirilmiş (indirgenmiş) özilişki işlevi kullanılır. Bu işlev, özilişki işlevinin sıfır kaymaya oranı olarak tanımlanır.

$$\gamma(t) = \frac{R(\tau)}{R(\tau = 0)} \qquad (5.85)$$

R(τ=0) değeri (5.80) denklemlerinden elde edilir.

$$R(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt$$

Bu koşullarda normalleştirilmiş özilişki işlevi,

$$\gamma(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t+\tau) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt} \qquad (5.86a)$$

dır. Bu işleve aynı zamanda ilişki işlevi de denir. Özilişkinin değişintiye olan oranıdır. Önemli özellikleri, sıfır kaymada "1" değerini alması ve birimsiz olmasıdır.

Gerçel işlevler yerine karmaşık işlevlerin kullanılması durumunda yine normalleştirilmiş özilişki işlevine ulaşılabilir.

$$\gamma(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\tau) f(\tau - t) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f^*(\tau) d\tau} \qquad (5.86b)$$

Özilişki İşlevinin Özellikleri

1. $R(-\tau) = R(\tau)$ (5.87)

R(τ), "τ" nun bir çift işlevidir. Başka bir deyişle gelişigüzel verilerin özilişki işlevleri mutlaka çift işlevdir.

2. $R(\tau=0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt$ (5.88)

Gelişigüzel verilerin sıfır kaymadaki özilişki işlevleri verinin ortalama karesel değerine (değişinti=varyans) eşittir. İstatistikten anımsandığı gibi ortalama değeri sıfır olan gelişigüzel bir
zaman dizisindeki değişinti;

$$\sigma^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt \qquad (5.89)$$

denklemi ile verilmektedir. (5.88) ile (5.89) denklemlerinin sağ tarafları birbirlerine eşittir. Bu nedenle;

$$P=\lim_{\tau\to 0}R(\tau)=R(\tau=0)=\sigma^2 \qquad (5.90)$$

yazılabilir.

3. Eğer f(t) işlevi T_0 dönemli bir işlev ise R(τ) işlevi de T_0 ile dönemseldir.

4. Özilişki işlevi tek yanlıdır. Yani her f(t) işlevinin özilişki işlevi hesaplanabilir. Ancak elde edilen özilişki işlevinden hareketle f(t) işlevi elde edilemez. Başka bir deyişle aynı özilişki işlevine sahip ∞ sayıda işlev bulunabilir Bu özelliğin nedeni, özilişki işlemi sırasında f(t) dizisine ilişkin evre bilgilerinin yitmesidir.

Örnek 5.20

$$f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

ile verilen f(t) işlevinin normalleştirilmiş özilişki işlevini bulunuz.

a. f(t) işlevi karmaşık olarak kabul edilirse, (5.86b) bağıntısından;

$$\gamma(t)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\tau)f(\tau-t)\,d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f^*(\tau)\,d\tau} \qquad (5.86b)$$

$$f(t) = e^{-\alpha t}$$
$$f(\tau) = e^{-\alpha\tau} = f^*(\tau)$$
$$f(t+\tau) = e^{-\alpha(t+\tau)}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t+\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-\alpha(t+\tau)} d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-\alpha\tau} e^{-\alpha t} d\tau = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha\tau} e^{-\alpha\tau} d\tau = e^{-\alpha\tau} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha\tau} d\tau$$
$$= e^{-\alpha\tau} \frac{-1}{2\alpha} e^{-2\alpha\tau} \Big|_{\tau=0}^{\infty} = \frac{e^{-2\alpha\tau}}{2\alpha} \left[e^{-\infty} - e^0 \right] = \frac{e^{-\alpha\tau}}{2\alpha}$$

verilen işlev, $-\infty<t<\infty$ aralığında daima $f(t)>0$ dır, bu nedenle $t \to |t|$ yazılabilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t+\tau) d\tau = \frac{e^{-\alpha|\tau|}}{2\alpha}$$

b. Aynı problem (5.85) denklemi kullanılarak [f(t) işlevinin gerçel olması)] ta çözülebilir.

$$\gamma(t) = \frac{R(\tau)}{R(\tau=0)}$$
$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t+\tau) dt$$
$$R(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-\alpha(t+\tau)} dt = e^{-\alpha\tau} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = -\frac{e^{-\alpha\tau}}{2\alpha} \left[e^{-\infty} - e^0 \right] = \frac{e^{-\alpha\tau}}{2\alpha}$$

elde edilen $R(\tau)$ özilişki işlevi, $-\infty<\tau<\infty$ aralığında daima "+" dir. Bu nedenle

$$R(\tau) = \left| \frac{e^{-\alpha\tau}}{2\alpha} \right|$$

veya

$$R(\tau) = \frac{e^{-\alpha|\tau|}}{2\alpha}$$

yazılabilir.

$$R(\tau=0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{2\alpha}$$
$$\gamma(t) = \frac{e^{\frac{-\alpha t}{2}\alpha}}{\frac{1}{2\alpha}} = e^{-\alpha|\tau|}$$

Problemin "a" ile aynı çözümü verdiği görülmektedir. Dikkat edilmesi gerekli konu özilişkinin "a" şıkkında "t" nin bir işlevi olmasına karşın bu şıkta ise "τ" nun bir işlevidir. γ(t) nin ise birimsiz olmasından dolayı (5.86a) veya (5.86b) denklemlerinden herhangi birinin kullanılması sonucu değiştirmez.

Ayrık verilerde özilişki

Özilişki, bir dalgacığın kendisi ile evrişimi olduğuna göre evrişim için kullanılan tüm kurallar özilişki için de geçerlidir. Yani önce dalgacığın tersi alınır ve daha sonrada asıl dalgacık ile ters çevrilmiş dalgacığın evrişimi bulunur. Öyleyse evrişim için;
1. seriler,
2. dizey yöntemi,
3. z dönüşümü (Bkz Bölüm 7 Örnek 10),
şeklinde kullanılan üç kural, özilişki için de aynen kullanılır.

Örnek 5.21
(1,2,4,1) dalgacığının özilişkisini bulunuz.

Sayısal bir işlevin özilişkisi Şekil 5.41 deki gibi bulunur. (1,2,4,1) dalgacığının özilişkisi 1,6,14,22,14,6,1) dır (Şekil 5.42).

Not: Seriler yöntemiyle özilişki alınırken dalgacık ters çevrilmeden işleme sokulur. Oysa katlama yönteminde dalgacığın tersi alınarak evrişimi bulunur.

5.6.5 Karşıt (Çapraz) İlişki (cross-correlation)

İki ayrı $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ işlevleri arasındaki ilişki evrişim tümlevi ile verilmektedir.

$$f_{12}(t) \cong \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \qquad (5.91)$$

Eğer işlevler "T" ile dönemli iseler, tümlev -∞ dan ∞ a kadar alınır. Bilindiği gibi dönemli işlevlerde tüm "T" değerleri için (5.91) tümlevinin sonucu olarak ±∞ veya 0 elde edilir. Bu durumda ise bir dönem içindeki ortalama değer kullanılır. O zaman Bölüm 5.6.4 teki yaklaşım kullanılarak

$$R_{12}(\tau) \cong \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t+\tau)\,dt \qquad (5.92)$$

yazılır. Bu denklem $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ işlevleri arasındaki çapraz ilişkiyi verir.

Not: $f_1(t)=f_2(t)$ olarak alınması durumunda aynı işlevin özilişkisi elde edilir. Buradan da (5.80) denklemlerine ulaşılır.

Bölüm 5.6.4 teki gidiş yolu kullanılarak 1/T çarpanı ortadan kaldırılır. O zaman çapraz ilişki,

$$R_{12}(\tau) \cong \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t+\tau) dt \tag{5.93a}$$

veya

$$R_{12}(\tau) \cong \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) f_1(t+\tau) dt \tag{5.93b}$$

olarak elde edilir.

Çapraz ilişki, özilişkinin tersine olarak bakışımsızdır.

$$R_{12}(\tau) \neq R_{21}(\tau) \tag{5.94}$$

Çapraz ilişkide en büyük değer herhangi bir kaymada görülebilir. Buradan iki $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ sinyallerinin hangi kaymalarda birbirlerine ne oranda benzedikleri ortaya konur. Yani çapraz ilişki, iki ayrı işlevin çeşitli kaymalarda birbirlerine benzerliğinin bir ölçüsüdür.

Ayrık verilerin çapraz ilişkisinin alınması, her iki verinin evrişiminin yapılması anlamındadır. Yalnız çapraz ilişkinin, evrişimden önemli bir farkı vardır. Burada hiçbir dalgacığın tersi alınmaz.

Örnek 5.22
(1,2,3) dalgacığı ile (1,3,1,2,3,1,1) dalgacığının çapraz ilişkisi ile evrişimini bulunuz.

Anılan dalgacıkların çapraz ilişkisi ve evrişimi Şekil 5.43 te verilmektedir.

Örnek 5.23
$f_1(t)$ ve $f_2(t)$ işlevlerinin çapraz ilişkileri ile $f_1(t)$ ve $f_2(-t)$ işlevlerinin evrişimlerinin aynı olduğunu gösteriniz.

$$G_{12}(t) = f_1(t) * f_2(-t)$$

olarak gösterelim. (5.54a) denkleminden

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$G_{12}(t) = f_1(t) * f_2(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2[-(t-\tau)] d\tau$$

$$G_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau$$

elde edilir. Bu denklemlerde τ=u dönüşümü yapılırsa,

$$G_{12}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(u)f_2(u-t)du$$

bulunur. Burada t=τ dönüşümü yapılırsa,

$$G_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(u)f_2(u-\tau)du$$

elde edilir. Yine bu denklemlerde u=t dönüşümü yapılırsa

$$G_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t-\tau)dt$$

sonucuna ulaşılır. Elde edilen bu denklem (5.92) ile aynıdır (ötelemenin "+" veya "-" olması birşey değiştirmez). Dolayısıyla

$$R_{12}(\tau)=G_{12}(\tau)=f_1(t)*f_2(-t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t-\tau)dt$$

yazılabilir. $f(t)=f_1(t)=f_2(t)$ olması durumunda ise son bağıntı

$$R_{11}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)dt$$

durumuna gelir [(5.80) denklemi].

Sonuç olarak;$f_1(t)$ ve $f_2(t)$ işlevlerinin çapraz ilişkilerinin alınması ile, işlevlerden bir tanesinin ters çevrilerek evrişimlerinin alınması aynı işlemdir.

5.7 GÜÇ YOĞUNLUĞU SPEKTRUMU

$(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlanan, dönemi bilinmeyen sinyallerin enerjileri;

$$E=\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

(5.11b) denklemiyle verilmektedir. Ancak dönemli izlerin enerjileri (5.11b) denklemindeki gibi hesaplanamazlar. Bunların enerjileri ±∞ veya sıfırdır (tekil sinyaller, güç sinyalleri gibi, Bkz Bölüm 5.2). Bu tür sinyallerin ortalama gücünden söz edilir. Güç sinyallerinin ortalama gücü limit durumundan yararlanılarak (5.12) denklemindeki gibi elde edilir.

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$$

Yukarıda değinilen olayı fiziksel bir örnekle açıklayalım.

Örnek 5.24
f(t) = A denklemi ile verilen (Şekil 5.44) işlevin enerjisini ve ortalama gücünü bulunuz.

Verilen işlevin enerjisi sonlu değildir. Gerçekten de f(t) izinin 1Ω luk bir dirençte harcadığı enerji sonsuzdur.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt = A^2 |t|_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

Öyleyse f(t) izinin enerjisinden söz edilemez (tekil sinyaller). Bunun yerine (5.12) denklemi ile verilen ortalama güç kullanılır. f(t)=A izinin 1Ω luk bir dirençte harcadığı ortalama güç;

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T} |t|_{-T/2}^{T/2} = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T} \left[\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2} \right) \right]$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T} T = A^2 < \infty$$

Görüldüğü gibi f(t) izinin enerjisi sonsuz ama ortalama gücü sonludur (tekil iz). (5.11b) denklemi ile verilen, zaman ortamındaki dönemsiz bir işlevin enerji spektrumu Parseval kuramı ile [(5.72) denklemi] bilinir. Parseval kuramında (5.75) gösterilimi ile;

$$S(w) = |F(w)|^2$$

enerji spektrumu veya spektral enerji yoğunluğu olarak tanımlanmıştır. (5.75) yaklaşımı kullanılarak bir sinyalin gücü;

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(w) dw \qquad (5.95a)$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df \qquad (5.95b)$$

olarak tanımlanır. Yukarıdaki bağıntılar bize gücün frekansa göre dağılımını gösterir. Bu nedenle S(w) veya S(f) değerlerine "enerji spektrumu", "spektral enerji yoğunluğu" isimleri verilebildiği gibi (Bkz Bölüm 5.6.2) "Güç yoğunluğu spektrumu" olarak ta tanımlanabilir. (5.95) denklemleri, S(w) veya S(f) nin her bir binindeki toplamlarının, "sinyalin gücü" olan "P" yi vereceğini göstermektedir.

Şimdiye dek tek bir sinyalin "güç yoğunluğu spektrumu" anlatılmıştır. Oysa iki ayrı sinyalin birlikte olan güç yoğunluğu spektrumu da kullanılır. Buna "çapraz güç yoğunluğu spektrumu" adı verilir.

$$F_{12}(w) = F_1(w) F^*_2(w) \qquad (5.96)$$

"*" işareti karmaşık eşleniği göstermektedir. Bu aşamada uyum spektrumu da tanımlanabilir. $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ işlevlerinin spektrumları $F_1(w)$, $F_2(w)$ olsun. $F_{11}(w)$, $f_1(t)$ işlevinin güç yoğunluğu spektrumu; $F_{22}(w)$, $f_2(t)$ işlevinin güç yoğunluğu spektrumu ve bunlara ait çapraz güç yoğunluğu spektrumu $F_{12}(w)$ olmak üzere (Bkz Bölüm 5.6.4 ve 5.6.5)

$$|K(w)| = \frac{|F_{12}(w)|}{[F_{11}(w).\,F_{22}(w)]^{1/2}} \tag{5.97}$$

uyum spektrumu olarak isimlendirilir. K(w) birimsizdir, 0 ile 1 arasında değer alır. 1, iki iz arasında tam bir uyum olduğunu, 0 ise olmadığını gösterir. Diğer özellikleri için, istatistikte kullanılan ilişki katsayısı ile ilgili özellikler burada da geçerlidir.

Diğer taraftan FD nün genlik spektrumu (5.18b) denkleminden elde edilmektedir.

$$|F(w)| = \left\{\{Ger[F(w)]\}^2 + \{San[F(w)]\}^2\right\}^{1/2} \qquad \text{(dönemi bilinmeyen sinyaller)}$$

$$|C_n| = \left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/!} \qquad \text{(dönemli sinyaller)}$$

güç yoğunluğu spektrumu ile genlik spektrumu arasındaki ilişki ise; (5.75) denklemi ile bilinmektedir.

$$S(w) = |F(w)|$$

Öyleyse güç yoğunluğu spektrumu;

$$S(w) = Ger\left[F^2(w)\right] + San\left[F^2(w)\right] \tag{5.98}$$

olarak tanımlanabilir.

5.8 WİENER KURAMI

Wiener-Kitchen bağıntısı

$$\Im^{-1}\left[|F(w)|^2\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 e^{jw\tau} dw \tag{5.99}$$

olarak verilir. τ=0 kaymada ise,

$$R(\tau = 0) = \Im^{-1}\left[|F(w)|^2\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \tag{5.100}$$

elde edilir. Öte yandan özilişki işlevinin τ=0 kaymadaki değeri (5.80) den yararlanarak

$$R(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \tag{5.101}$$

bulunur. (5.75) yaklaşımının

$$S(w) = |F(w)|^2$$

(5.100) de kullanılması durumunda

$$R(\tau = 0) = \Im^{-1}[S(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(w)dw \tag{5.102}$$

dır. Son bağıntıdan hareketle

$$R(\tau) = \Im^{-1}[S(w)] \tag{5.103a}$$
$$S(w) = \Im[R(\tau)] \tag{5.103b}$$

en genel durum elde edilir. Bu eşitlikler Wiener-Kitchen bağıntısının bir sonucudur ve Wiener kuramı olarak bilinir. (5.103) denklemleri; güç yoğunluğu spektrumu S(w) ile, özilişki işlevi R(τ) nun FD çifti oluşturduğunu gösterir. Öyleyse,

$$S(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-jw\tau}d\tau \quad \rightarrow \quad R(\tau = 0) = \Im^{-1}[S(w)] \tag{5.104a}$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(w)e^{jw\tau}dw \quad \rightarrow \quad S(w) = \Im[R(\tau = 0)] \tag{5.104b}$$

olarak tanımlanır. (5.104) bağıntılarından yararlanarak P ortalama güç, S(w) cinsinden

$$P = \lim_{\tau=0} R(\tau) = \lim_{\tau=0} \int_{-\infty}^{\infty} S(w)e^{jw\tau}dw \tag{5.105}$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S(w)dw \tag{5.106}$$

elde edilir. (5.106) bağıntısı bize güç spektrumunun, özilişki işlevinin FD nün sıfır kaymadaki değerine eşit olduğunu gösterir.

Not:
τ=0 kayma için (5.86b) denkleminin (5.82) ye döndüğüne dikkat ediniz.

5.8.1 Güç Spektrumunun Özellikleri

Güç spektrumu, sıfır kaymadaki özilişki işlevinin FD olduğuna göre, özilişki işlevinin tüm özelliklerini içerir. Bunlar:

1. Özilişki işlevi bakışık olduğundan güç spektrumu da bakışıktır. Bu nedenle (5.104) denklemlerindeki sinüs içeren terimler ortadan kalkarak kosinüs dönüşümü haline gelir.

$$S(w) = 2\int_0^{\infty} R(\tau)\cos(w\tau)d\tau \tag{5.107}$$

$$R(\tau) = 2\int_0^{\infty} S(w)\cos(w\tau)dw \tag{5.108}$$

2. Güç spektrumunun bakışık olması nedeni ile spektrum ortamında sanal terim ortadan kalkar dolayısı ile güç spektrumunun, evre spektrumu yoktur. Oysa bir sinyal spektrum ortamında ancak genlik ve evre spektrumu ikilisi ile tanınır. Yine bu ikiliden ters dönülerek zaman ortamındaki sinyal bulunabilir. Eğer bu ikiliden bir tanesi tanımlanamıyorsa, ters dönüşlerde asıl sinyal bulunamaz. Burada da evre spektrumu olmadığından, ters dönerek zaman ortamındaki orijinal sinyal belirlenemez. Başka bir deyişle farklı bir çok sinyalin güç spektrumu aynı olabilir.

3. Güç spektrumu (5.95) bağıntılarından da görüldüğü gibi sürekli bir işlevdir ve sonlu bir değere sahiptir. Dolayısı ile TFD bulunabilir (ancak orijinal sinyal elde edilemez). Benzer bir şekilde gelişigüzel tüm işlevlerin özilişkilerinin FD alınarak güç spektrumu elde edilebilir.

Örnek 5.25
Beyaz gürültünün özilişkisini ve güç spektrumunu bulunuz.

Güç yoğunluğu spektrumu değişmeyen gelişigüzel sinyallere beyaz gürültü denir. Sinyalimizin güç yoğunluğu spekturumunun "A" gibi bir sabit olduğunu varsayalım.

$$S(w) = A$$

Bunun özilişkisi (5.104b) denkleminden yararlanılarak elde edilir.

$$R(\tau) = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{jw\tau}dw \tag{5.109}$$

Bölüm 6 da verilen dürtü işlevinin (6.11); özelliğinden yararlanarak;

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{jw\tau}dw$$

$$R(\tau) = 2\pi A\,\delta(t) \tag{5.110}$$

elde edilir. Dürtü işlevinin

$$\delta(\tau) = \begin{bmatrix} \infty & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{bmatrix}$$

özellikleri (Bkz Bölüm 6) anımsandığında, özilişki işlevinin gerçel, ideal bir sinyal olmadığı anlaşılır (Bkz Bölüm 6.1). Beyaz gürültünün gücü ise (5.106) denkleminden bulunur. (5.106) denkleminin (Şekil 5.44) çözümünden sonsuz uzunluktaki beyaz gürültünün gücünün sonsuz olduğu anlaşılmaktadır. Yine aynı örneğe benzer şekilde (örnekteki sinyal zaman ortamında $-T/2, T/2$ aralığında sınırlanmıştır), frekans ortamında sonsuz aralıkta tanımlanan sinyal belirli bir $-w_c$, $+w_c$ aralığında tanımlanarak güç yoğunluğu spektrumu sabit olan gelişigüzel sinyaller için kullanıldığında; "Beyaz gürültü" kavramı ortaya çıkar. Başka bir deyişle beyaz gürültü, asıl sinyale her frekans bininde aynı miktarda etki eder. O zaman $\pm w_c$ bandı içinde kalan beyaz gürültünün güç yoğunluğu spektrumu;

$$\begin{bmatrix} A & -w_c < w < w_c \\ & \\ 0 & -\infty < w < w_c \\ & w_c < w < \infty \end{bmatrix} \tag{5.111}$$

olarak tanımlanır. (5.108) denkleminin TFD alınarak özilişki işlevi;

$$R(\tau) = 2A\frac{\sin(w_c\tau)}{w_c\tau} \tag{5.112}$$

elde edilir. Beyaz gürültünün güç yoğunluğu spektrumu Şekil 5.45 te ve özilişkisi Şekil 5.46 da verilmektedir.

Örnek 5.26

SP yönteminde, küre biçimli yapılara güç spektrumu yöntemini uygulayarak derinlik parametresini saptayınız.

Merkez derinliği h, yarıçapı R olan kürenin (Şekil 5.47) yeryüzündeki izdüşümünden x uzaklığında oluşturacağı gerilim;

$$V(x) = \frac{\Delta V R^2}{2}\left[\frac{h\cos(\alpha) + x\sin(\alpha)}{(x^2 + h^2)^{3/2}}\right] \tag{5.113}$$

bağıntısı ile verilir (Heiland 1968). V(x) gerilim bağıntısının FD (5.113) bağıntısında,

$$N = \frac{\Delta V R^2}{2}$$

tanımlaması yapılıp, sabit olduğu için tümleme dışına alınarak;

$$V(x) = N\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{h\cos(\alpha) + x\sin(\alpha)}{(x^2 + h^2)^{3/2}}\right]e^{-jwx}dx \tag{5.114}$$

eşitliği ile tanımlanır. (5.114) bağıntısını iki ayrı terimin toplamı şeklinde yazıp, tümlev sabitlerini tümlev dışına alırsak;

$$V(x) = N\,h\cos(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{-jwx}}{(x^2 + h^2)^{3/2}}\right]dx + N\sin(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{x\,e^{-jwx}}{(x^2 + h^2)^{3/2}}\right]dx \tag{5.115}$$

denklemi elde edilir. Euler bağıntısı kullanıldığında, birinci terim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jwx}}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(wx) - j\sin(wx)}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}} \tag{5.116}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jwx}}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(wx)}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}} dx - j\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(wx)}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}} dx \tag{5.117}$$

durumuna gelir. Aynı yaklaşım (5.115) bağıntısının ikinci terimine de uygulanırsa;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, e^{-jwx}}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(wx)}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}} dx - j\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(wx)}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}} dx \tag{5.118}$$

elde edilir.

Bu işlemler, Erdelyi (1954) tümleme tabloları (Bkz Ek A) kullanılarak çözüldüğünde (5.117) bağıntısındaki tümlev;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jwx}}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}} dx = 2\left[\frac{w}{h} K_0(wh) + \frac{w}{h} K_1(wh)\right] \tag{5.119}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (5.118) bağıntısındaki tümlev de çözülürse,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, e^{-jwx}}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}} dx = 2\left[\frac{j}{h}\frac{d}{dw} w K_1(wh) + j w K_0(wh)\right] \tag{5.120}$$

elde edilir. $K_n(wh)$ Modifiye Bessel işlevidir. (5.120) bağıntısındaki Bessel işlevinin türevi ise;

$$\frac{d}{dw}\left[w K_1(wh)\right] = -h\, w K_0(wh) \tag{5.121}$$

dw

olarak bilinir. (5.120), (5.121) kullanılarak yeniden yazılırsa;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, e^{-jwx}}{\left(x^2+h^2\right)^{3/2}} dx = -2j\left[w K_0(wh) + w K_0(wh)\right] \tag{5.122}$$

elde edilir. (5.119) ve (5.122) yardımıyla, (5.115) tekrar düzenlenirse

$$V(w) = 4 N w \cos(\alpha) K_1(wh) - j 4 N w \sin(\alpha) K_0(wh) \tag{5.123}$$

elde edilir.

Güç spektrumu E(w) gerçel ve sanal bileşenlerin kareleri toplamı olarak tanımlandığından,

$$E(w) = 16\,N^2\,w^2\left[\cos(\alpha)^2\,K_1^2(wh) + \sin^2(\alpha)K_0^2(wh)\right] \qquad (5.124)$$

bulunur.

Polarlanma açısının (Ó) güç spektrumu üzerindeki denetiminin araştırılması amacıyla, küre şekilli bir yapının SP anomalisinin spektrumu (5.124) ve Ek'te verilen bağıntılar kullanılarak hesaplanmıştır. Uygulama, küre yarıçapı, derinlik ve gerilim farkı sabit olmak üzere üç değişik polarlanma açısı (10°, 45°, 75°) kullanılarak gerçekleştirilmiştir (Şekil 5.48). Şeklin incelenmesinden, polarlanma açısının alçak frekanslar dışında spektrum üzerinde denetimi olmadığı görülmektedir.

Yukarıda değinilen açıklamalar ve Modifiye Bessel fonksiyonlarının özellikleri (Abramowitz ve Stegun 1972) gözönüne alınarak (Şekil 5.49),

$$wh \geq 2 \quad , \quad K_0 \equiv K_1 \equiv K$$

$$K = \frac{1.253}{(wh)^{1/2}\,e^{wh}}$$

(5.124) bağıntısı tekrar düzenlenirse

$$E(w) = 16\,N^2\,w^2\left[\cos(\alpha)^2\,K^2(wh) + \sin^2(\alpha)K^2(wh)\right]$$

$$E(w) = 16\,N^2\,w^2\,K^2(wh)\left[\cos(\alpha)^2 + \sin^2(\alpha)\right]$$

$$E(w) = 16\,N^2\,w^2\,K^2(wh) \qquad (5.126)$$

şeklini alır. (5.126) bağıntısında

$C = 16\,N^2$

konularak,

$$E(w) = C\,w^2\,K^2(wh) \qquad (5.127)$$

bağıntısı elde edilir. (5.127) nin doğal logaritması alınırsa

$$\mathrm{Ln}\,E(w) = \mathrm{Ln}\,C + 2\,\mathrm{Ln}\,w + 2\,\mathrm{Ln}\,K(wh) \qquad (5.128)$$

bulunur. (5.128), (5.115) yaklaşımı kullanılarak tekrar düzenlenirse,

$$\mathrm{Ln}\,E(w) = \mathrm{Ln}\,C + 2\,\mathrm{Ln}\,w + 2\,\mathrm{Ln}\,1.25 - \mathrm{Ln}\,wh - 2wh \qquad (5.129)$$

elde edilir (Akçığ ve diğ. 1990). (5.129) bağıntısı incelendiğinde birinci ve üçüncü terimler spektrumun genliğine, diğer terimler (iki, dört ve beş) ise spektrumun eğimine etki etmektedir. Eğimi denetleyen bu terimler incelendiğinde; iki ve dördüncü terimlerin, w nın değişimine bağlı olarak, spektrumun eğiminin denetimindeki etkilerinin az olduğu açıkça anlaşılmaktadır (Çizelge 5.1). Bu durumda spektrumun eğimi üzerindeki temel etki -2wh teriminden kaynaklanmaktadır. Gerek buradaki yaklaşımlar gerekse benzer şekilde aynı yöntemin gravite ve manyetik uygulamalarındaki yaklaşımlar (Spector ve Grant 1970, Green 1972, vd) gözönüne alındığında; yaklaşık olarak

$$\text{Eğim} = -2h \qquad (5.130)$$

bağıntısı yazılabilir ve bu bağıntıdan anomaliye neden olan küre şekilli cismin derinliği saptanabilir.

Ödevler

1. Çift dikdörtgen dalganın (Şekil 5.50) FD nü bulunuz.

2. Gauss işlevi $f(t) = e^{-\alpha t^2}$ olarak verilmektedir. Bu işlevin FD nü bulunuz.

3. $f(t) = \begin{cases} \cos(w_0 t) & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > 0 \end{cases}$

işlevinin FD nü bularak spektrumunu çiziniz.
